

TRIGONOMETRÍA

- Desarrollo sistemático del curso
- Temas didácticamente explicados
- Datos de cultura general
- Banco de preguntas tipo admisión

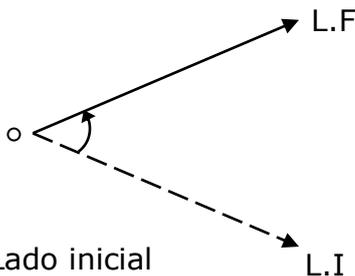


ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO

SISTEMA DE MEDICIÓN

1. ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO.

Es una figura generada por la rotación de un rayo, alrededor de un punto fijo llamado vértice, desde una posición inicial hasta una posición final.

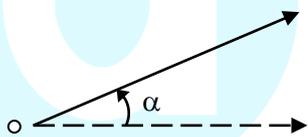


L.I.: Lado inicial
L.F.: Lado Final

1.1 CONVENCIÓN :

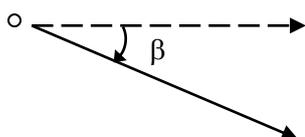
Ángulos Positivos

Si el rayo gira en sentido Antihorario

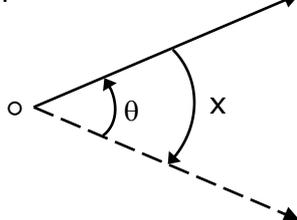


Ángulos Negativos

Si el rayo gira en sentido horario.



Ejemplo:



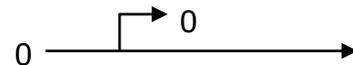
Nótese en las figuras:

- "θ" es un ángulo trigonométrico de medida positiva.
- "x" es un ángulo trigonométrico de medida negativa.
⇒ Se cumple: $x = -\theta$

Observación:

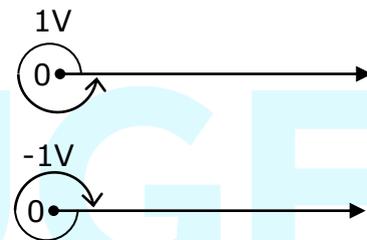
a) Ángulo nulo

Si el rayo no gira, la medida del ángulo será cero.



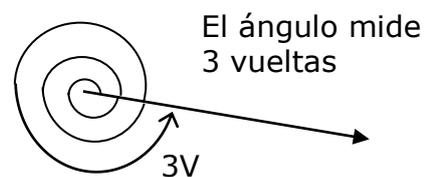
b) Ángulo de una vuelta

Se genera por la rotación completa del rayo, es decir su lado final coincide con su lado inicial por primera vez.

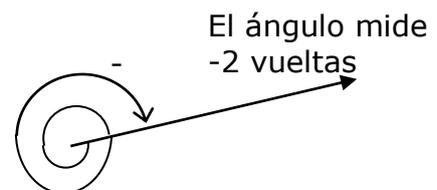


c) Magnitud de un ángulo

Los ángulos trigonométricos pueden ser de cualquier magnitud, ya que su rayo puede girar infinitas vueltas, en cualquiera de los sentidos. Como se muestra en el ejemplo.



El ángulo mide 3 vueltas



El ángulo mide -2 vueltas

2. SISTEMAS ANGULARES

Así como para medir segmentos se requiere de una unidad de longitud

determinada, para medir ángulos se necesita de otro ángulo como unidad de medición.

2.1 Sistema Sexagesimal

Su unidad angular es el grado sexagesimal (1°); el cual es equivalente a la 360^{ava} parte del ángulo de una vuelta.

$$1^\circ = \frac{1V}{360} \rightarrow 1V = 360^\circ$$

Equivalencias:

$1^\circ = 60'$	$1' = 60''$	$1^\circ = 3600''$
-----------------	-------------	--------------------

2.2 Sistema Centesimal

Su unidad angular es el grado centesimal (1^g), el cual es equivalente a la 400^{ava} parte del ángulo de una vuelta.

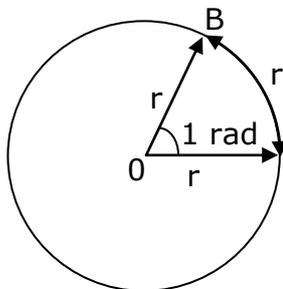
$$1^g = \frac{1V}{400} \rightarrow 1V = 400^g$$

Equivalencias:

$1^g = 100^m$	$1^m = 100^s$	$1^g = 10000^s$
---------------	---------------	-----------------

2.3 Sistema Radial o Circular o Internancional

Su unidad es el radian, el cual es un ángulo que subtiene un arco de longitud equivalente al radio de la circunferencia respectiva.



$$m\angle AOB = 1 \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{1V}{2\pi} \rightarrow 1V = 2\pi \text{ rad} \approx 6,2832$$

Nota

Como $\pi = 3,141592653\dots$

Entonces:

$$\pi \approx 3,1416 \approx \frac{22}{7} \approx \sqrt{10} \approx \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

3. CONVERSION DE SISTEMAS

Factor de Conversión Es un cociente "conveniente" de dos magnitudes angulares equivalentes.

Magnitudes angulares equivalentes

✗ 1 vuelta : 1 v	$360^\circ = 400^g = 2\pi \text{ rad}$
✗ Llano : 1/2v	$180^\circ = 200^g = \pi \text{ rad}$
Grados :	$9^\circ = 10^g$

Ejemplos:

- Convertir a radianes la siguiente magnitud angular $\alpha = 12^\circ$

Resolución:

Magnitud equivalente	Factor de Conversión
$\pi \text{ rad} = 180^\circ$	$\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$

$$\alpha = 12^\circ \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{\pi}{15} \text{ rad}$$

- Convertir a radianes la siguiente magnitud angular: $\beta = 15^g$

Resolución:

Magnitud equivalente	Factor de Conversión
$\pi \text{ rad} = 200^g$	$\frac{\pi \text{ rad}}{200^g}$

$$\beta = 15^g \frac{\pi \text{ rad}}{200^g} = \frac{3\pi}{40} \text{ rad}$$

- Convertir a sexagesimal la sgte. magnitud angular: $\theta = 40^g$

Magnitud equivalente	Factor de Conversión
$9^{\circ} = 10^g$	$\frac{9^{\circ}}{10^g}$

$$\theta = 40^g \frac{9^{\circ}}{10^g} = 36^{\circ}$$

- Hallar: $E = \frac{1^{\circ}}{1'} + \frac{1^g}{1^m} + \frac{9^{\circ}}{5^g}$

Resolución:

Recordando: $1^{\circ} = 60'$
 $1^g = 100^m$
 $9^{\circ} = 10^g$

Reemplazando en:

$$E = \frac{60'}{1'} + \frac{100^m}{1^m} + \frac{10^g}{5^g}$$

$$E = 60 + 100 + 2 = 162$$

- Hallar: a+b sabiendo $\frac{\pi}{8} \text{ rad} = a^{\circ}b'$

Resolución:

Equivalencia: $\pi \text{ rad} = 180^{\circ}$

$$\frac{\pi}{8} \text{ rad} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi \text{ rad}} = \frac{180^{\circ}}{8} = \frac{45^{\circ}}{2}$$

$$\Rightarrow 22,5^{\circ} = 22^{\circ} + 0,5^{\circ} = 22^{\circ}30'$$

Luego:

$$\frac{\pi}{8} \text{ rad} = 22^{\circ}30' = a^{\circ}b'$$

Efectuando:

$$a=22$$

$$b=30$$

Entonces: $a+b = 52$

Nótese que para convertir un ángulo de un sistema a otro, multiplicaremos por el factor de conversión.

- Convertir a sexagesimales y radianes la siguiente magnitud angular. $\alpha = 16^g$

Resolución:

A) 16^g a sexagesimales

$$\text{Factor de conversión} = \frac{9^{\circ}}{10^g}$$

Luego:

$$\alpha = 16^g \frac{9^{\circ}}{10^g} = \frac{144^{\circ}}{10} = \frac{72^{\circ}}{5} = 14,4^{\circ}$$

B) 16^g a radianes

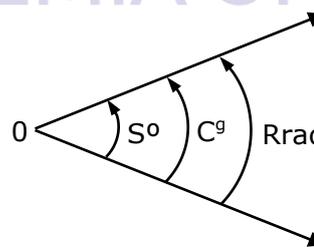
$$\text{Factor de conversión} = \frac{\pi \text{ rad}}{200^g}$$

Luego:

$$\alpha = 16^g \frac{\pi \text{ rad}}{200^g} = \frac{16 \cdot \pi \text{ rad}}{200} = \frac{2\pi}{25} \text{ rad}$$

4. **FORMULA GENERAL DE CONVERSION**

Sean S, C y R los números que representan la medida de un ángulo en los sistemas sexagesimal, centesimal y radial respectivamente, luego hallamos la relación que existe entre dichos números.



De la fig. $S^{\circ} = C^g = R \text{ rad} \dots (1)$

Además $180^{\circ} = 200^g = \pi \text{ rad} \dots (2)$

Dividiendo (1) entre (2) tenemos:

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} \quad \text{Fórmula o Relación de Conversión}$$

Fórmula particulares:

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} \quad \text{Sexagesimal y Centesimal}$$

$$\boxed{\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}} \quad \text{Sexagesimal y Radian}$$

$$\boxed{\frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}} \quad \text{Centesimal y Radian}$$

Ejemplos:

- Convertir $\frac{\pi}{5}$ rad a grados sexagesimal.

Resolución:

Sabemos que: $\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}$
 $\rightarrow \frac{S}{180} = \frac{\pi/5}{\pi} \rightarrow S=36$
 $\therefore \frac{\pi}{5} \text{ rad} = 36^\circ$

- Convertir 60° a radianes.

Resolución:

Sabemos que: $\frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$
 $\rightarrow \frac{60}{200} = \frac{R}{\pi}$
 $\rightarrow R = \frac{3\pi}{10}$
 $\therefore 60^\circ = \frac{3\pi}{10} \text{ rad}$

- Convertir 27° a grados centesimales.

Resolución:

Sabemos que: $\frac{S}{9} = \frac{C}{10}$
 $\rightarrow \frac{27}{9} = \frac{C}{10}$
 $\rightarrow C=30$
 $\therefore 27^\circ = 30^g$

- Seis veces el número de grados sexagesimales de un ángulo sumado a dos veces el número de sus grados centesimales es 222. ¿Hallar el número de radianes de dicho ángulo?

Resolución:

Si S, C y R son números que representan las medidas del ángulo en grados sexagesimales, en grados centesimales y en radianes respectivamente; del enunciado afirmamos.

$$6S + 2C = 222 \dots (1)$$

Además:

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \begin{cases} S = \frac{180R}{\pi} \\ C = \frac{200R}{\pi} \end{cases}$$

Reemplazando en (1):

$$6 \cdot 180 \frac{R}{\pi} + 2 \cdot \frac{200R}{\pi} = 222$$

$$\frac{1080}{\pi} R + \frac{400R}{\pi} = 222$$

$$\frac{1480}{\pi} R = 222$$

$$\boxed{R = \frac{3}{20} \pi}$$

Nota: Para solucionar este tipo de problemas también podríamos hacer:

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} = K \begin{cases} S = 180K \\ C = 200K \\ R = \pi K = ? \end{cases}$$

Reemplazando en (1):

$$6(180K) + 2(200K) = 222$$

$$1480K = 222$$

$$K = \frac{3}{20}$$

$$\therefore R = \pi K = \frac{3\pi}{20}$$

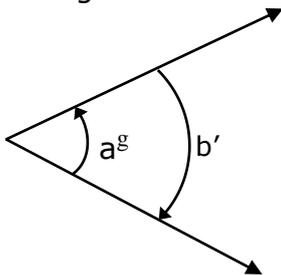
EJERCICIOS

1. Calcular: J.C.C.H.

Si: $68^{\circ} < \overline{JC} \overline{CH}'$

- a) 6 b) 12 c) 24
d) 30 e) 22

2. Dada la figura:



Calcular:

$$K = \frac{b + 4a}{-2a}$$

- a) 5 b) 10 c) 15
d) 20 e) 25

3. La medida de los ángulos iguales de un triángulo isósceles son $(6x)^{\circ}$ y $(5x+5)^{\circ}$. Calcular el ángulo desigual en radianes.

- a) $\frac{2\pi}{5}$ rad b) $\frac{3\pi}{5}$ c) $\frac{4\pi}{5}$ rad
d) $\frac{\pi}{10}$ rad e) $\frac{\pi}{5}$ rad

4. Determinar la medida circular de un ángulo para el cual sus medidas en los diferentes sistemas se relacionan de la siguiente manera:

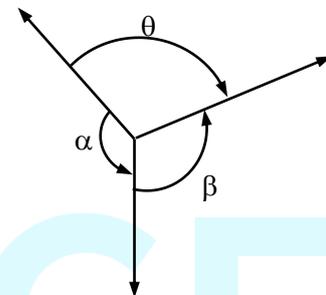
$$\left(\frac{18}{S}\right)^3 + \left(\frac{20}{C}\right)^3 + \left(\frac{\pi}{10R}\right)^3 = \left(\frac{3,5C - 3S}{C - S}\right) \frac{1}{9}$$

- a) 3π rad b) $\frac{2\pi}{10}$ rad c) $\frac{3\pi}{20}$ rad
d) $\frac{4\pi}{7}$ rad e) $\frac{5\pi}{18}$ rad

5. La media aritmética de los números que expresan la medida de un ángulo positivo en grados sexagesimales y centesimales, es a su diferencia como 38 veces el número de radianes de dicho ángulo es a 5π . Hallar cuanto mide el ángulo en radianes.

- a) $\frac{5\pi}{4}$ rad b) $\frac{4\pi}{3}$ rad c) $\frac{2\pi}{3}$ rad
d) $\frac{5\pi}{3}$ rad e) $\frac{6\pi}{5}$ rad

6. Del gráfico, hallar una relación entre α , β y θ .



- a) $\alpha - \beta + \theta = -360^{\circ}$
b) $\alpha + \beta - \theta = 360^{\circ}$
c) $\alpha + \beta + \theta = 360^{\circ}$
d) $\alpha - \beta - \theta = 360^{\circ}$
e) $\alpha + \beta - \theta = -360^{\circ}$

7. Siendo S y C lo convencional de un ángulo para el cual se cumple:

$$5S + 3C = \frac{1^{\circ}2^m}{2^m} + \frac{1^{\circ}12'}{3'}$$

Hallar el número de grados sexagesimales.

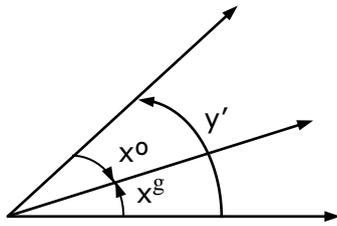
- a) 10 b) 81 c) 72
d) 9 e) 18

8. Sabiendo que: $\sqrt[3]{S} = \sqrt[3]{C}$ y además: $S^x = 9x$, Hallar: $M = \sqrt{10x}$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

9. Del gráfico, calcular y/x

- a) $-1/6$
- b) -6
- c) 6
- d) $1/3$
- e) $-1/3$



10. Si los números que representan la medida de un ángulo en los sistemas "S" y "C", son números pares consecutivos. El valor del complemento del ángulo expresado en radianes es:

- a) $\frac{\pi}{10}$ rad b) $\frac{3\pi}{10}$ rad c) $\frac{4\pi}{5}$ rad
- d) $\frac{2\pi}{5}$ rad e) $\frac{7\pi}{3}$ rad

11. Siendo "y" el factor que convierte segundos centesimales en minutos sexagesimales y "x" el factor que convierte minutos centesimales en segundos sexagesimales. Calcular x/y .

- 0a) 2000 b) 4000 c) 6000
- d) 8000 e) 9000

12. Siendo "S" el número de grados sexagesimales y "c" el número de grados centesimales que mide un ángulo menor que una circunferencia, calcular dicho ángulo en radianes sabiendo que .

$$C = x^2 - x - 30 \quad ; \quad S = x^2 + x - 56$$

- a) $\frac{3\pi}{5}$ b) $\frac{3\pi}{7}$ c) $\frac{3\pi}{10}$
- d) $\frac{3\pi}{11}$ e) $\frac{3\pi}{13}$

13. Si se cumple que:

$$361(C - S)^3 = 400(C + S)^2$$

Hallar:

$$E = \sqrt{\frac{2,4R + \pi}{1,3R - \pi}}$$

- a) $9/5$ b) $8/3$ c) $6/5$
- d) $5/2$ e) $7/5$

14. Sabiendo que a, b y R son los números que expresan la medida de un ángulo en minutos sexagesimales, segundos centesimales y radianes respectivamente. Calcular:

$$E = \sqrt{\frac{\pi}{32R}} (a + 0,001b)$$

- a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{10}$ c) $\sqrt{20}$
- d) 10 e) 20

15. Reducir: $E = \frac{1^g}{10^m} + \frac{1^o}{3'} + \frac{1^m}{2^s}$

- a) 10 b) 40 c) 50
- d) 70 e) 80

16. Si "S", "C" y "R" son los números que indican la medida de un ángulo en los sistemas convencionales. Hallar dicho ángulo en grados "S" si "R" es entero:

$$1 + \frac{4C - 6S}{S - C} < \frac{5R}{2} < \frac{2C}{C - S}$$

Rtpa.

17. En un cierto ángulo, se cumple que:

$$\sqrt{2S} + \sqrt[3]{C+7} = 9. \quad \text{Calcular el complemento del ángulo en radianes.}$$

- a) $\frac{\pi}{10}$ b) $\frac{3\pi}{10}$ c) $\frac{2\pi}{5}$
- d) $\frac{3\pi}{20}$ e) $\frac{7\pi}{5}$

18. Al medir un ángulo positivo en los sistemas convencionales, se observó que los números que representan dichas medidas, se relacionan del siguiente modo:

“La diferencia del triple del mayor con el doble del intermedio, resulta ser igual a treinta veces el número menor entre π , aumentado todo esto en 70, obtener la medida circular”.

- a) $\frac{\pi}{2}$ rad b) $\frac{\pi}{3}$ rad c) $\frac{\pi}{4}$ rad
d) $\frac{\pi}{5}$ e) $\frac{\pi}{6}$

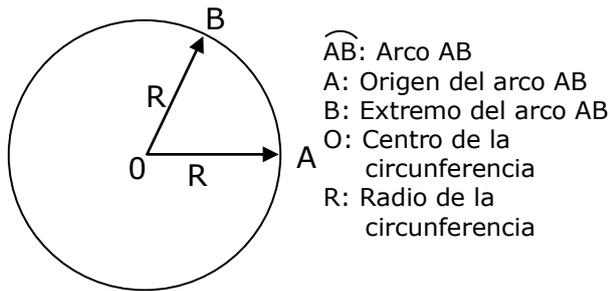
19. Sabiendo que la suma de los números que representan la medida de un triángulo en grados sexagesimales es 133. Entonces la medida de dicho ángulo es:

- a) $\frac{7\pi}{20}$ rad b) 70g
c) 63° d) 133°
e) “a”, “b”, y “c” son correctas

SECTOR CIRCULAR RUEDAS Y ENGRANAJES

1. ARCO

Una porción cualquiera de una circunferencia, recibe el nombre de "Arco" de la circunferencia.

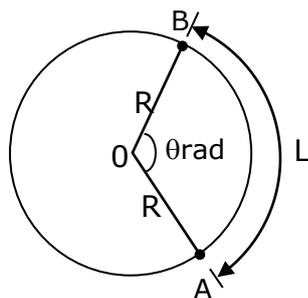


Amplitud

Dada por la medida del ángulo central que sostiene el arco.

Longitud de Arco

En una circunferencia de radio "R" un ángulo central de " θ " radianes determina una longitud de arco "L", que se calcula multiplicando el número de radianes " θ " y el radio de la circunferencia "R".



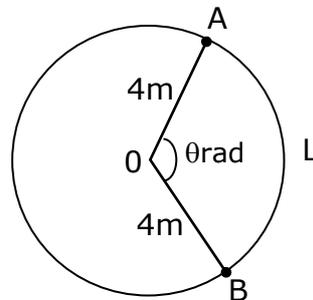
L: Longitud del arco AB
 R: Radio de la circunferencia
 θ : N° de radianes del ángulo central ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)

$$L = R \cdot \theta$$

Ejemplo:

Determine el perímetro de un sector circular AOB cuyo radio tiene por longitud 4m, y la amplitud del ángulo es 0,5 radianes.

Resolución:

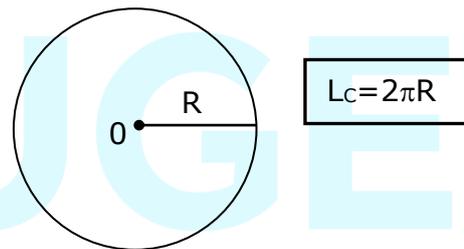


$L = R \cdot \theta$
 $L = 4 \cdot 0,5$
 $L = 2$
 El perímetro $2p$ del sector AOB será:
 $2p = R + R + L$
 $2p = 4m + 4m + 2m$

$$2p = 10m$$

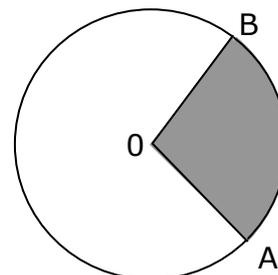
Nota:

- La longitud de la circunferencia se calcula multiplicando 2π por el radio "R" de la circunferencia ($2\pi R$)



2. SECTOR CIRCULAR

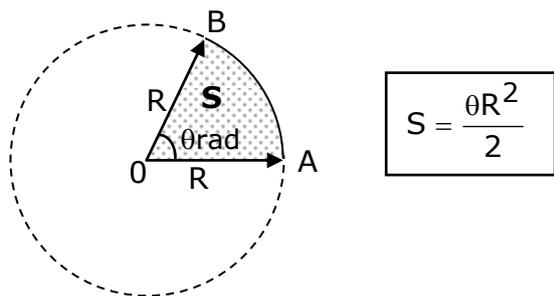
Se llama sector circular a la región circular limitada por dos radios y el arco correspondiente.



◁ AOB: Sector Circular AOB

Área del Sector Circular

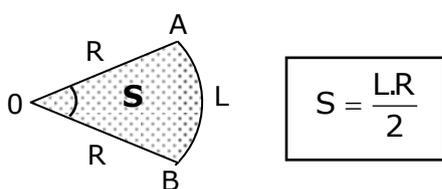
El área de un sector circular es igual al semiproducto de la longitud de su radio elevado al cuadrado y la medida de su ángulo central, en radianes; es decir:



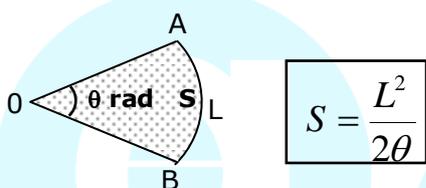
$$S = \frac{\theta R^2}{2}$$

Donde:
S: Área del sector circular AOB

Otras fórmulas



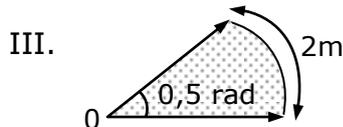
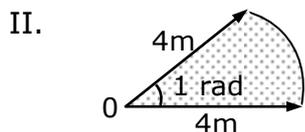
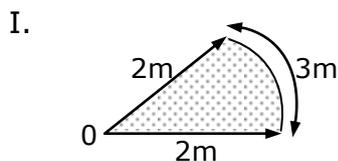
$$S = \frac{LR}{2}$$



$$S = \frac{L^2}{2\theta}$$

Ejemplos:

- Calcular el valor del área de los sectores circulares mostrados en cada caso:



Resolución:

Caso I

$$S_I = \frac{L \cdot R}{2} \Rightarrow S_I = \frac{(3m) \cdot (2m)}{2}$$

$$S_I = 3m^2$$

Caso II

$$S_{II} = \frac{R^2 \theta}{2} \Rightarrow S_{II} = \frac{(4m)^2 \cdot 1}{2}$$

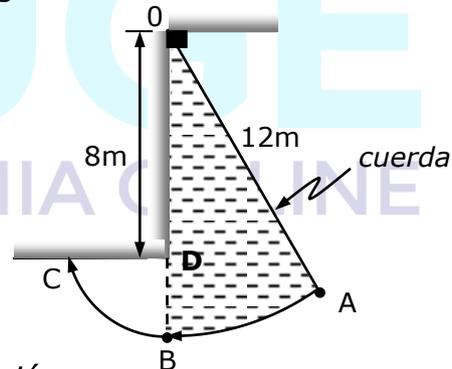
$$S_{II} = 8m^2$$

Caso III

$$S_{III} = \frac{L^2}{2\theta} \Rightarrow S_{III} = \frac{(2m)^2}{2 \cdot 0,5}$$

$$S_{III} = 4m^2$$

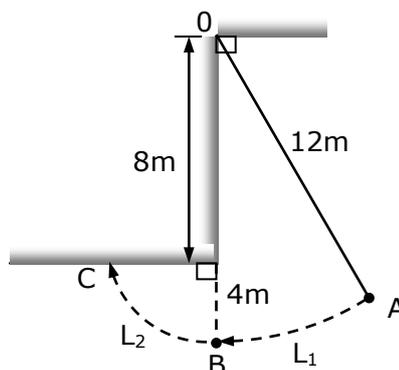
- De la figura mostrada, calcular el área de la región sombreada, si la línea curva ABC, tiene por longitud $4\pi m$.



Resolución:

Denotemos por:

- L_1 : Longitud del arco \widehat{AB} , el radio $R_1 = 12m$
- L_2 : Longitud del arco \widehat{BC} , el radio $R_2 = 4m$



De la figura:

$$L_2 = R_2 \cdot \theta_2 = 4m \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$L_2 = 2\pi m$$

Según el dato:

$$L_{AB} + L_{BC} = 4\pi m$$

$$L_1 + L_2 = 4\pi m$$

$$L_1 + 2\pi = 4\pi m$$

$$L_1 = 2\pi m$$

El área del sector AOB será:

$$S_1 = \frac{L_1 \cdot R_1}{2} = \frac{2\pi m \cdot 12m}{2} = \boxed{12\pi m^2}$$

Observaciones:

- El incremento de un mismo radio "R" en un sector circular inicial de Área "S" (fig.1); produce un incremento de área proporcional a los números impares de "S", que el estudiante podría comprobar (fig.2).

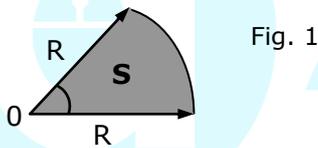


Fig. 1

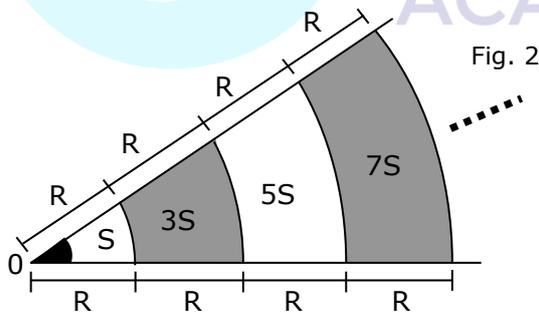
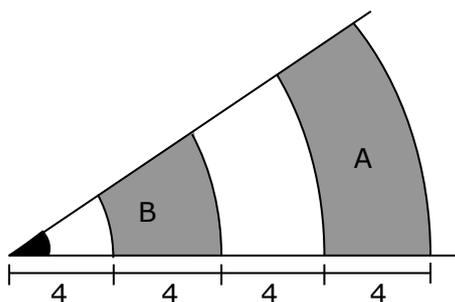


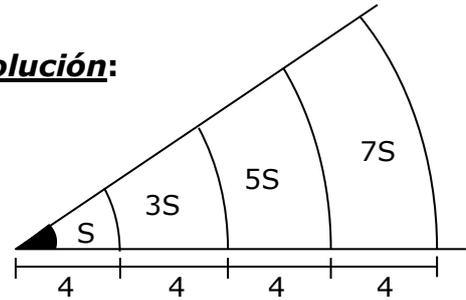
Fig. 2

Ejemplo:

Hallar el cociente de las áreas sombreadas A y B respectivamente.



Resolución:



Recordando la observación:

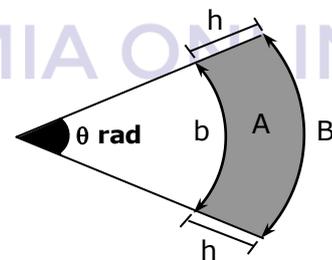
$$A = 7S$$

$$B = 3S$$

$$\frac{A}{B} = \frac{7}{3}$$

AREA DE UN TRAPECIO CIRCULAR

- Se llama trapecio circular a aquella región circular formada por la diferencia de dos sectores circulares concéntricos.
- El área de un trapecio circular es igual a la semisuma de las longitudes de arcos que conforman al trapecio circular, multiplicada por su espaciamento, es decir:



$$A_T = \left(\frac{B + b}{2} \right) \cdot h$$

Donde:

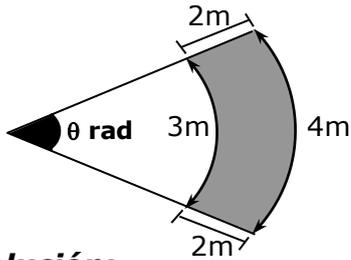
A_T = Área del trapecio circular.

También:

$$\theta_{rad} = \frac{B - b}{h}$$

Ejemplos:

- Calcular el valor del área del trapecio, y encontrar la medida del ángulo central en la figura mostrada.



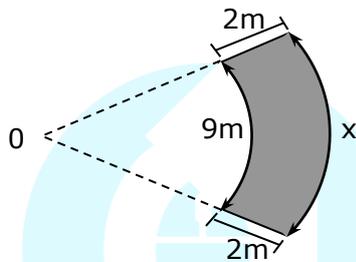
Resolución:

$$A_T = \left(\frac{4+3}{2}\right) \cdot 2 \quad \theta_{\text{rad}} = \frac{4-3}{2}$$

$$\therefore A_T = 7\text{m}^2 \quad \therefore \theta_{\text{rad}} = \frac{1}{2} = 0,5$$

- Hallar "x" si el área del trapecio circular es 21m²

Resolución:



Resolución:

Por dato: $A_T = 21$

Por fórmula:

$$A_T = \frac{(x+9)}{2} \cdot 2 = x+9$$

Igualamos:

$$x+9 = 21$$

$$x = 21\text{m}$$

Aplicación de la Longitud del Arco

Número de Vueltas que da una Rueda (#v)

El número de vueltas (#v) que da una rueda al desplazarse (sin resbalar) desde la posición A hasta B. Se calcula mediante la relación.

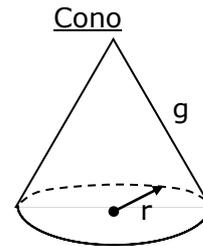
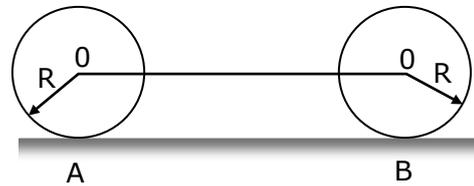
$$\#v = \frac{Ec}{2\pi R}$$

Ec: Espacio que recorre el centro de la rueda.

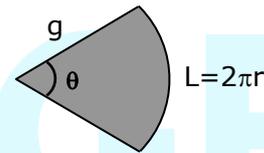
$$\theta_B = \frac{Ec}{R}$$

R: Radio

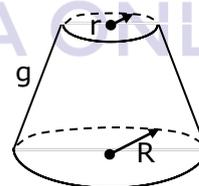
θ_B : Angulo barrido



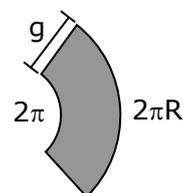
Desarrollo del Cono



Tronco de Cono



Desarrollo del Tronco de Cono

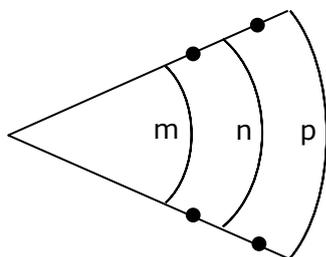


EJERCICIOS

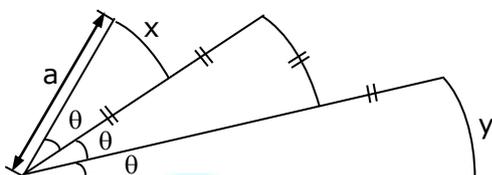
1. De La figura calcular:

$$E = \frac{n - m}{p - m}$$

- a) 0
- b) 1
- c) 0,5
- d) 0,2
- e) 2



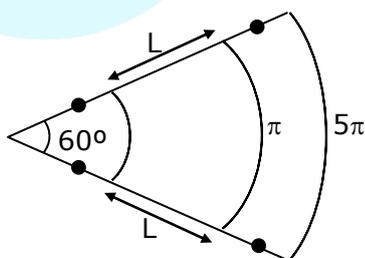
2. Del gráfico hallar "x+y"



- a) a
- b) 2a
- c) 3a
- d) 4a
- e) 5a

3. Del gráfico, hallar "L"

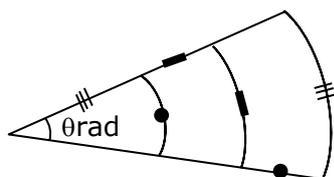
- a) 1
- b) 1/3
- c) 1/5
- d) 3
- e) 5



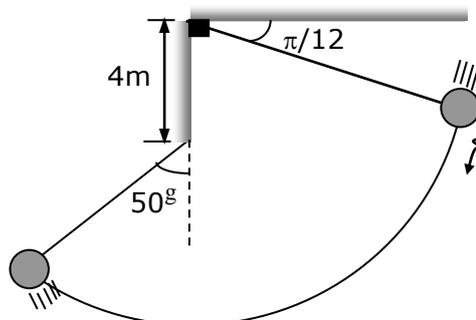
4. De la figura calcular:

$$E = (\theta^2 - 2)(\theta - 1)$$

- a) 1
- b) 2
- c) 0,5
- d) 0,3
- e) 0,25

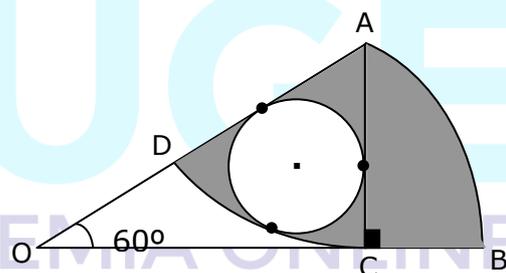


5. Un péndulo se mueve como indica en la figura. Calcular la longitud del péndulo, si su extremo recorre 3π m.



- a) 5m
- b) 6m
- c) 7m
- d) 8m
- e) 9m

6. Calcule el área de la región sombreada $OA=12m$

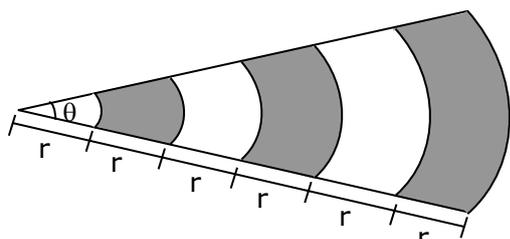


- a) $(14\pi - 18\sqrt{3})m^2$
- b) $(12\pi + 5\sqrt{2})m^2$
- c) $(4\sqrt{3} + 2\pi)m^2$
- d) $3\pi m^2$
- e) πm^2

7. Se tiene un sector circular de radio "r" y un ángulo central 36° . ¿Cuánto hay que aumentar el ángulo central de dicho sector para que su área no varíe, si su radio disminuye en un cuarto del anterior?

- a) 64°
- b) 100°
- c) 36°
- d) 20°
- e) 28°

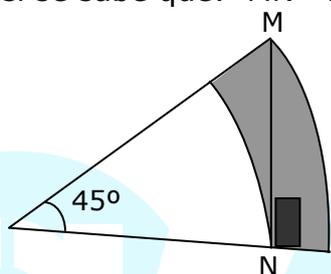
8. Calcular el área sombreada en:



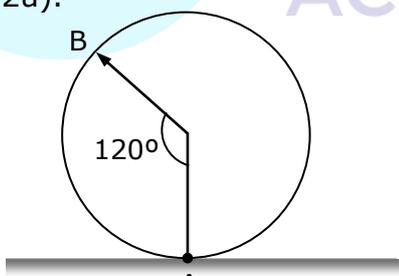
- a) $150r^2$ b) $210r^2$ c) $30r^2$
 d) $\frac{21}{2}\theta r^2$ e) $\frac{70r^2}{2}$

9. Del gráfico adjunto, calcular el área sombreada, si se sabe que: $MN=4m$

- a) $2\pi m^2$
 b) πm^2
 c) $4\pi m^2$
 d) $\frac{\pi}{2} m^2$
 e) $3\pi m^2$



10. Cuánto avanza la rueda de la figura adjunta si el punto "A" vuelve a tener contacto otras 7 veces y al detenerse el punto "B" está en contacto con el piso ($r=12u$).



- a) 88π b) 92π c) 172π
 d) 168π e) 184π

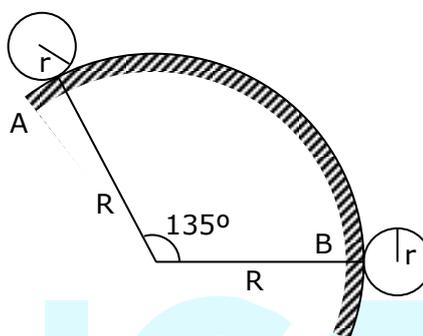
11. Una grúa cuyo brazo es 15m está en posición horizontal se eleva hasta formar un ángulo de 60° con la horizontal luego conservando este ángulo gira 72° . ¿Determinar el recorrido por el extremo libre de la grúa en estos dos momentos?

- a) 4π b) 10π c) 8π
 d) π e) 5π

12. Qué espacio recorre un rueda de 4cm de radio si da 15 vueltas al girar sin resbalar sobre un piso plano.

- a) 60π cm b) 90π cm
 c) 100π cm d) 105π cm
 e) 120π cm

13. De la figura mostrada determinar el número de vueltas que da la rueda de radio "r" en su recorrido de A hasta B ($R=7r$).



- a) 2 b) 3 c) 4
 d) 5 e) 6

14. Los radios de las ruedas de una bicicleta, son entre sí como 3 es a 4. Calcular el número de vueltas que da la rueda mayor cuando la rueda menor gire 8π radianes.

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 6 e) 8

15. Calcular el espacio que recorre una bicicleta, si la suma del número de vueltas que dan sus ruedas es 80. Se sabe además que los radios de las mismas miden $3u$ y $5u$.

- a) 100π b) 200π c) 250π
 d) 300π e) 500π

16. El ángulo central de un sector mide 80° y se desea disminuir en 75° ; en cuanto hay que alargar el radio del sector, para que su área no varíe, si su longitud inicial era igual a 20cm.

- a) 20 cm b) 40 cm c) 60 cm
d) 80 cm e) 100 cm

17. La longitud del arco correspondiente a un sector circular disminuye en un 20%. ¿Qué ocurre con el área de sector circular?

- a) aumenta en 5%
b) disminuye en 5%
c) no varía
d) falta información
e) disminuye en 20%

18. Calcular la medida del ángulo central en radianes de un sector circular tal que su perímetro y área son 20m y 16m^2 respectivamente.

- a) 0,5 b) 2 c) 8
d) 2 y 8 e) 0,5 y 8

19. Hallar en grados sexagesimales la medida del ángulo central de un sector circular, sabiendo que la raíz cuadrada de su área es numéricamente igual a la longitud de su arco.

- a) $\pi/90$ b) $\pi/180$ c) $\pi/6$
d) $2\pi/3$ e) $3\pi/2$

20. Se tienen dos ruedas en contacto cuyos radios están en la relación de 2 a 5. Determinar el ángulo que girará la rueda menor, cuando la rueda mayor de 4 vueltas.

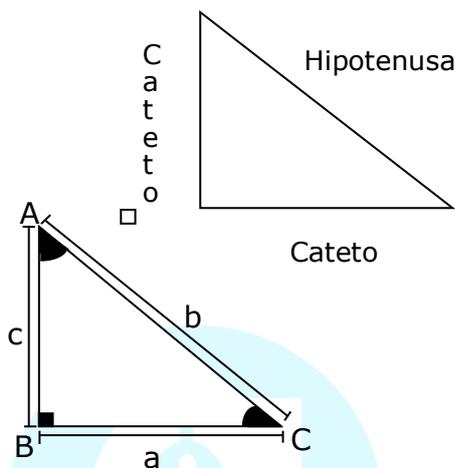
- a) 4π b) 5π c) 10π
d) 20π e) 40π

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Las razones trigonométricas son números que resultan de dividir dos lados de un triángulo rectángulo.

TRIANGULO RECTANGULO



Teorema de Pitágoras

“La suma de cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa”.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

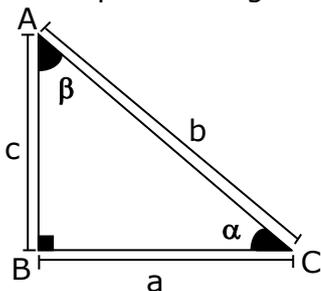
Teorema

“Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios”.

$$\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$$

2. DEFINICION DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS PARA UN ANGULO AGUDO.

Dado el triángulo ABC, recto en “B”, según la figura, se establecen las sgts definiciones para el ángulo agudo “α”:



$$\text{Sen } \alpha = \frac{\text{Cat.op.}}{\text{Hip.}} = \frac{c}{b} = \text{Cos } \beta$$

$$\text{Cos } \alpha = \frac{\text{Cat.ady.}}{\text{Hip.}} = \frac{a}{b} = \text{Sen } \beta$$

$$\text{Tg } \alpha = \frac{\text{Cat.op.}}{\text{Cat.ady.}} = \frac{c}{a} = \text{Ctg } \beta$$

$$\text{Ctg } \alpha = \frac{\text{Cat.ady.}}{\text{Cat.op.}} = \frac{a}{c} = \text{Tg } \beta$$

$$\text{Sec } \alpha = \frac{\text{Hip.}}{\text{Cat.ady.}} = \frac{b}{a} = \text{Csc } \beta$$

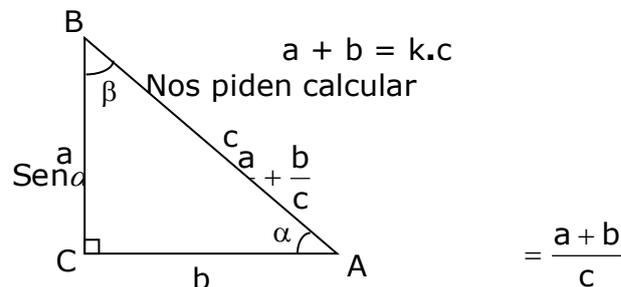
$$\text{Csc } \alpha = \frac{\text{Hip.}}{\text{Cat.op.}} = \frac{b}{c} = \text{Sec } \beta$$

Ejemplo:

- En un triángulo rectángulo ABC (recto en C), se sabe que la suma de catetos es igual “k” veces la hipotenusa. Calcular la suma de los senos de los ángulos agudos del triángulo.

Resolución:

Nótese que en el enunciado del problema tenemos:



Luego: $\text{Sen } \alpha + \text{Sen } \beta = \frac{k \cdot c}{c} = k$ □

- Los tres lados de un triángulo rectángulo se hallan en progresión aritmética, hallar la tangente del mayor ángulo agudo de dicho triángulo.

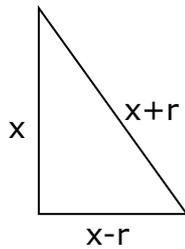
Resolución:

Nótese que dado el enunciado, los lados del triángulo están en progresión aritmética, de razón "r" asumamos entonces:

- Cateto Menor = x - r
- Cateto Mayor = x
- Hipotenusa = x + r

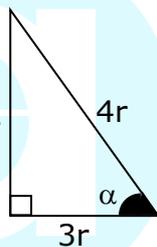
Teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} (x-r)^2+x^2 &= (x+r)^2 \\ x^2-2xr+r^2+x^2 &= x^2+2xr+r^2 \\ x^2-2xr &= 2xr \\ x^2 &= 4xr \\ x &= 4r \end{aligned}$$



Importante

"A mayor cateto, se opone mayor ángulo agudo". Luego, reemplazando en la figura tenemos:



Nos piden calcular $Tg\alpha = \frac{4r}{3r} = \frac{4}{3}$

- Calcular el cateto de un triángulo rectángulo de 330m de perímetro, si la tangente de uno de sus ángulos agudos es 2,4.

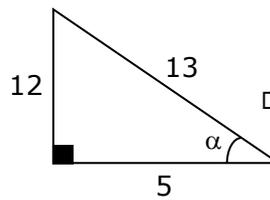
Resolución:

- a) Sea "α" un ángulo agudo del triángulo que cumpla con la condición:

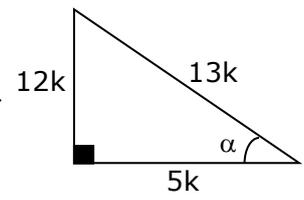
$$Tg\alpha = 2,4 = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

Ubicamos "α" en un triángulo rectángulo, cuya relación de catetos guardan la relación de 12 a 5. La hipotenusa se calcula por pitágoras.

Triáng. Rectángulo Particular



Triáng Rectángulo General



- b) El perímetro del es:
 Según la figura: $5k+12k+13k = 30k$
 Según dato del enunciado $= 330m$
 Luego: $30k = 330$
 $k = 11m$
- d) La pregunta es calcular la longitud del menor cateto es decir:
 Cateto menor $= 5k$
 $= 5 \cdot 11m \Rightarrow 55m$

3. PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS

3.1 Razones Trigonométricas Recíprocas.
 "Al comparar las seis razones trigonométricas de un mismo ángulo agudo, notamos que tres partes de ellas al multiplicarse nos producen la unidad".

Las parejas de las R.T. recíprocas son entonces:
 $Sen\alpha \cdot Csc\alpha = 1$
 $Cos\alpha \cdot Sec\alpha = 1$
 $Tg\alpha \cdot Ctg\alpha = 1$

Ejemplos:

- Indicar la verdad de las siguientes proposiciones.
- I. $Sen20^\circ \cdot Csc10^\circ = 1$ ()
 II. $Tg35^\circ \cdot Ctg50^\circ = 1$ ()
 III. $Cos40^\circ \cdot Sec40^\circ = 1$ ()

Resolución:

Nótese que las parejas de R.T. recíprocas, el producto es "1"; siempre que sean ángulos iguales.
 Luego:
 $Sen20^\circ \cdot Csc10^\circ \neq 1$; \sphericalangle_s **No** son iguales
 $Tg35^\circ \cdot Ctg50^\circ \neq 1$; \sphericalangle_s **No** son iguales
 $Cos40^\circ \cdot Sec40^\circ = 1$; \sphericalangle_s **Sí** son iguales

- Resolver "x" agudo que verifique:
 $Tg(3x+10^\circ+\alpha) \cdot Ctg(x+70^\circ+\alpha) = 1$

Resolución:

Nótese que en la ecuación intervienen, R.T. trigonométricas; luego los ángulos son iguales.

$$Tg(3x+10^\circ+\alpha) \cdot Ctg(x+70^\circ+\alpha) = 1$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ \text{ángulos iguales} \\ 3x+10^\circ+\alpha = x+70^\circ+\alpha \\ 2x=60^\circ \\ \boxed{x=30^\circ} \end{array}$$

- Se sabe:

$$\text{Sen}\theta \cdot \text{Cos}\theta \cdot \text{Tg}\theta \cdot \text{Ctg}\theta \cdot \text{Sec}\theta = \frac{3}{7}$$

Calcular: $E = \text{Cos}\theta \cdot \text{Tg}\theta \cdot \text{Ctg}\theta \cdot \text{Sec}\theta \cdot \text{Csc}\theta$

Resolución:

Recordar:

$$\text{Cos}\theta \cdot \text{Sec}\theta = 1$$

$$\text{Tg}\theta \cdot \text{Ctg}\theta = 1$$

$$\text{Sec}\theta \cdot \text{Csc}\theta = 1$$

Luego; reemplazando en la condición del problema:

$$\text{Sen}\theta \cdot \underbrace{\text{Cos}\theta \cdot \text{Tg}\theta \cdot \text{Ctg}\theta \cdot \text{Sec}\theta}_{"1"} = \frac{3}{7}$$

$$\text{Sen}\theta = \frac{3}{7} \dots (I)$$

Nos piden calcular:

$$E = \text{Cos}\theta \cdot \text{Tg}\theta \cdot \text{Ctg}\theta \cdot \text{Sec}\theta \cdot \text{Csc}\theta$$

$$E = \text{Csc}\theta = \frac{1}{\text{Sen}\theta}$$

pero de (I) tenemos: $\text{Sen}\theta = \frac{3}{7}$

$$\therefore E = \frac{7}{3}$$

3.2 Razones Trigonómicas de Angulos Complementarios.

"Al comparar las seis R.T. de ángulos agudos, notamos que tres pares de ellas producen el mismo número, siempre que su ángulo sean complementarios".

Nota:

"Una razón trigonométrica de un ángulo a la co-razón del ángulo complementario".

RAZON **CO-RAZON**

 Seno → Coseno

 Tangente → Cotangente

 Secante → Cosecante

Dado: $x+y=90^\circ$, entonces se verifica

$$\text{Sen}x = \text{Cos}y$$

$$\text{Tg}x = \text{Ctg}y$$

$$\text{Sec}x = \text{Csc}y$$

Así por ejemplo:

- $\text{Sen}20^\circ = \text{Cos}70^\circ$ ($20^\circ+70^\circ=90^\circ$)

- $\text{Tg}50^\circ = \text{Ctg}40^\circ$ ($50^\circ+40^\circ=90^\circ$)

- $\text{Sec}80^\circ = \text{Csc}10^\circ$ ($80^\circ+10^\circ=90^\circ$)

Ejemplo:

- Indicar el valor de verdad según las proposiciones:

I. $\text{Sen}80^\circ = \text{Cos}20^\circ$ ()

II. $\text{Tg}45^\circ = \text{Ctg}45^\circ$ ()

III. $\text{Sec}(80^\circ-x) = \text{Csc}(10^\circ+x)$ ()

Resolución:

Nótese que dado una razón y co-razón serán iguales al elevar que sus ángulos sean iguales.

I. $\text{Sen}80^\circ \neq \text{Cos}20^\circ$ ($80^\circ+20^\circ \neq 90^\circ$)

II. $\text{Tg}45^\circ = \text{Ctg}45^\circ$ ($45^\circ+45^\circ=90^\circ$)

III. $\text{Sec}(80^\circ-x) = \text{Csc}(10^\circ+x)$
 ($80^\circ-x+10^\circ+x=90^\circ$)

- Resolver el menor valor positivo de "x" que verifique:

$$\text{Sen}5x = \text{Cos}x$$

Resolución:

Dada la ecuación $\text{Sen}5x = \text{Cos}x$; luego los ángulos deben sumar 90° :

$$\Rightarrow 5x+x=90^\circ$$

$$6x=90^\circ$$

$$x=15^\circ$$

- Resolver "x" el menor positivo que verifique:

$$\text{Sen}3x - \text{Cos}y = 0$$

$$\text{Tg}2y \cdot \text{Ctg}30^\circ - 1 = 0$$

Resolución:

Nótese que el sistema planteado es equivalente a:

$$\begin{aligned} \text{Sen}3x = \text{Cos}y &\Rightarrow 3x + y = 90^\circ \dots(I) \\ \text{Tg}2y \cdot \text{Ctg}30^\circ = 1 &\Rightarrow 2y = 30^\circ \dots(II) \\ &y = 15^\circ \end{aligned}$$

Reemplazando II en I

$$\begin{aligned} 3x + 15^\circ &= 90^\circ \\ 3x &= 75^\circ \\ x &= 25^\circ \end{aligned}$$

- Se sabe que "x" e "y" son ángulos complementarios, además:

$$\begin{aligned} \text{Sen}x &= 2t + 3 \\ \text{Cos}y &= 3t + 4,1 \end{aligned}$$

Hallar Tgx

Resolución:

Dado: $x + y = 90^\circ \rightarrow \text{Sen}x = \text{Cos}y$

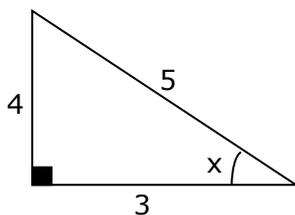
Reemplazando $2t + 3 = 3t + 4,1$
 $-1,1 = t$

Conocido "t" calcularemos:

$$\begin{aligned} \text{Sen}x &= 2(-1,1) + 3 \\ \text{Sen}x &= 0,8 \\ \text{Sen}x &= \frac{4}{5} \dots\dots (I) \end{aligned}$$

Nota:

Conocida una razón trigonométrica, luego hallaremos las restantes; graficando la condición (I) en un triángulo, tenemos:

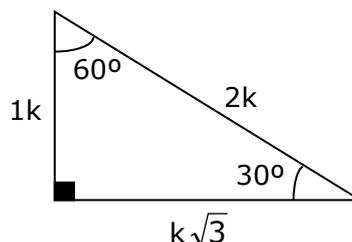


$$\text{Tgx} = \frac{\text{Cat.Op.}}{\text{Cat.Ady.}} = \frac{4}{3}$$

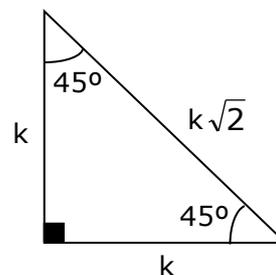
4. RAZONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS AGUDOS NOTABLES

4.1 Triángulos Rectángulos Notables Exactos

I. 30° y 60°



II. 45° y 45°



4.2 Triángulos Rectángulos Notables Aproximados

I. 37° y 53°



II. 16° y 74°

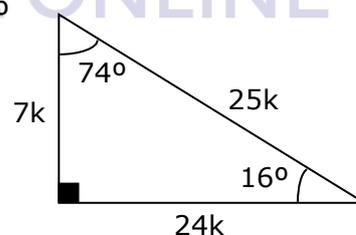


TABLA DE LAS R.T. DE ANGULOS NOTABLES

α R.T.	30°	60°	45°	37°	53°	16°	74°
Sen α	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	3/5	4/5	7/25	24/25
Cos α	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{2}/2$	4/5	3/5	24/25	7/25
Tg α	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	1	3/4	4/3	7/24	24/7
Ctg α	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	1	4/3	3/4	24/7	7/24
Sec α	$2\sqrt{3}/3$	2	$\sqrt{2}$	5/4	5/3	25/24	25/7
Csc α	2	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	5/3	5/4	25/7	25/24

Ejemplo:

Calcular: $F = \frac{4 \cdot \text{Sen}30^\circ + \sqrt{3} \cdot \text{Tg}60^\circ}{10 \cdot \text{Cos}37^\circ + \sqrt{2} \cdot \text{Sec}45^\circ}$

Resolución:

Según la tabla mostrada notamos:

$$F = \frac{4 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{10 \cdot \frac{4}{5} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow F = \frac{2+3}{8+2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

EJERCICIOS

- Calcular "x" en :
 $\text{Sen}(2x - 10^\circ) = \text{Cos}(x + 10^\circ)$
 a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$
 d) $\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{\pi}{5}$
- Si : $\text{Tg}(8x - 5^\circ) \text{Tg}(x + 5^\circ) = 1$
 Hallar:
 $K = \text{Sen}^2 3x - \text{Ctg}^2 6x$
 a) $\frac{7}{12}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $-\frac{7}{12}$
 d) $-\frac{1}{12}$ e) 1
- Hallar "x" en :
 $\text{Cos}(60^\circ - x) \text{Csc}(70^\circ - 3x) = 1$
 a) 5° b) 15° c) 25°
 d) 10° e) -5°
- Si : $\text{Cos}x = \frac{\sqrt{5}}{3}$, Calcular "Sen x"
 a) $\frac{1}{3}$ b) 1 c) $\frac{3}{5}$
 d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- Si : $\text{Tg}\theta = \frac{2}{5}$, Calcular :
 $P = \text{Sen}^3\theta \text{Cos}\theta + \text{Cos}^3\theta \text{Sen}\theta$
 a) $\frac{10}{29}$ b) $\frac{20}{29}$ c) $\frac{210}{841}$

d) $\frac{420}{841}$ e) $\frac{421}{841}$

- Dado: $\text{Sec}x = \frac{5}{4}$
 Calcular : $E = \frac{\text{Sen}x}{1+\text{Cos}x} + \frac{1+\text{Cos}x}{\text{Sen}x}$
 a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{8}{3}$ c) $\frac{9}{3}$
 d) $\frac{10}{3}$ e) $\frac{3}{10}$
- Si: $\text{Sec}x = 2$, Calcular :
 $P = (\text{Tg}x - \text{Sen}x)^2 + (1 - \text{Cos}x)^2$
 a) 0,5 b) 1 c) 1,5
 d) 2 e) 3
- Si : $\text{Tg}\theta = a$,
 Calcular : $K = \frac{1 - \text{Sen}^2\theta}{1 + \text{Tg}^2\theta}$
 a) $\frac{1}{(1+a^2)^2}$ b) $\frac{a^2}{1+a^2}$
 c) $\frac{1}{1+a^2}$ d) $\frac{a^2}{(1+a^2)^2}$
 e) $\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$
- En un triángulo rectángulo ABC,
 $\text{Tg}A = \frac{20}{21}$, y la hipotenusa mide 58cm,
 Hallar el perímetro del triángulo.
 a) 156cm. b) 116cm. c) 136cm.
 d) 140cm. e) 145cm.
- Si en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a los $\frac{5}{2}$ del producto de los catetos,
 Hallar la tangente del mayor de los ángulos agudos de dicho triángulo.
 a) 1 b) 1,5 c) 2
 d) 4 e) 6

11. Calcular :

$$E = \frac{\text{Sen}1^\circ + \text{Sen}2^\circ + \text{Sen}3^\circ + \dots + \text{Sen}89^\circ}{\text{Cos}1^\circ + \text{Cos}2^\circ + \text{Cos}3^\circ + \dots + \text{Cos}89^\circ}$$

- a) 0 b) 1 c) 2
d) $\frac{1}{2}$ e) 90

12. En un triángulo rectángulo recto en "A". Calcular el cateto "b", si se tiene que:

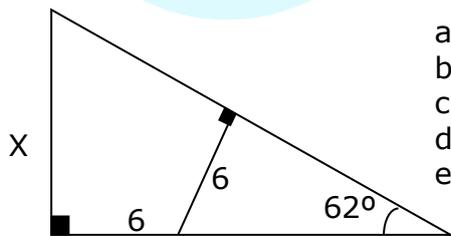
$$\text{Sen}B \text{Sen}C \text{Tg}B = \frac{16}{a^2}$$

- a) 16 b) 8 c) 2
d) 4 e) $9\sqrt{2}$

13. En un triángulo rectángulo el semiperímetro es 60m y la secante de uno de los ángulos es 2,6 calcular la mediana relativa a la hipotenusa.

- a) 5 b) 13 c) 12
d) 24 e) 26

14. De la figura, Hallar "x" si: $\text{Tg}76^\circ = 4$



- a) 6
b) 8
c) 12
d) 18
e) 24

15. En un cuadrado "ABCD" ; se prolonga el lado \overline{AB} , Hasta un punto "E", tal que : $\overline{AB} = 5\overline{BE}$
Calcular la tangente del ángulo \widehat{EDC}

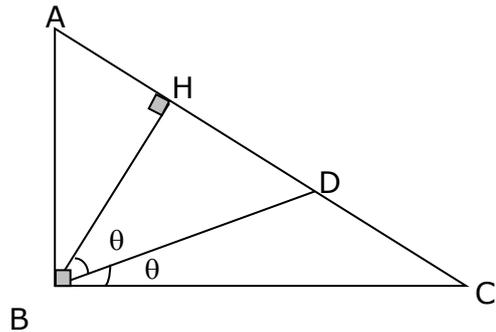
- a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{4}{5}$ c) 1
d) $\frac{6}{5}$ e) $\frac{5}{6}$

16. Hallar el valor reducido de:

$$E = \sqrt{4\text{Tg}37^\circ - \text{Tg}60^\circ + \text{Sen}^4 45^\circ + \text{Sen}30^\circ}$$

- a) $\text{Tg}37^\circ$ b) $2\text{Sen}30^\circ$ c) $\text{Tg}60^\circ$
d) $\text{Sen}37^\circ$ e) $4\text{Tg}37^\circ$

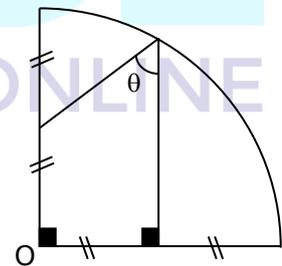
17. Si: $\overline{AC} = 4\overline{DC}$, Hallar "Ctgθ"



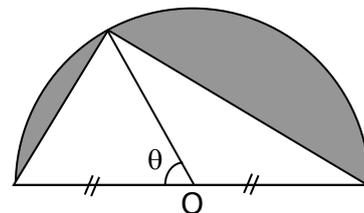
- a) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ b) $\sqrt{7}$ c) $\frac{2\sqrt{7}}{3}$
d) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ e) $\frac{3\sqrt{7}}{7}$

18. Calcular $\text{Ctg}\theta$.

- a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $2\sqrt{3} - 1$
c) $\sqrt{3} + 1$
d) $\sqrt{3} - 1$
e) $\sqrt{3}$



19. Del gráfico, calcular $\text{Tg}(\text{Sen}\theta)$ si el área sombreada es igual al área no sombreada.

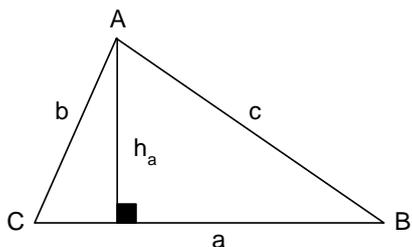


- a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) 1
d) $\frac{4}{3}$ e) $\sqrt{3}$

ÁREAS DE TRIÁNGULOS Y CUADRILÁTEROS

1. AREA DE UN TRIANGULO

- a) Area en términos de dos lados y el ángulo que éstos forman:



Sea: S el área del triángulo

$$\text{Sabemos que: } S = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$\text{Pero: } h_a = b \text{Sen} C$$

$$\text{Entonces: } S = \frac{ab}{2} \text{Sen} C$$

Análogamente:

$$S = \frac{bc}{2} \text{Sen} A \quad S = \frac{ac}{2} \text{Sen} B$$

- b) Area en términos del semi-perímetro y los lados:

Entonces:

$$S = \frac{ab}{2} \text{Sen} C = \frac{ab}{2} \left(\frac{C}{2R} \right)$$

$$S = ab \text{Sen} \frac{C}{2} \text{Cos} \frac{C}{2}$$

$$\therefore S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- c) Area en términos de los lados y el circunradio (R):

Sabemos que:

$$\frac{C}{\text{Sen} C} = 2R \Rightarrow \text{Sen} C = \frac{C}{2R}$$

$$S = \frac{ab}{2} \text{Sen} C = \frac{ab}{2} \left(\frac{C}{2R} \right)$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

Ejemplos:

- Hallar el área de un triángulo cuyos lados miden 171cm, 204cm y 195 cm.

Resolución: Sabemos que:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Entonces:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{171+204+195}{2} = 285$$

Luego:

$$S = \sqrt{285(285-171)(285-204)(285-195)}$$

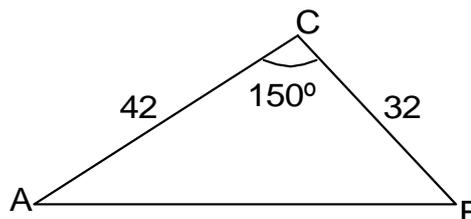
$$S = \sqrt{285(114)(81)(90)}$$

$$S = (57)(5)(9)(3)(2)$$

$$S = 15390 \text{ cm}^2$$

- Dos lados de un Δ miden 42cm y 32cm, el ángulo que forman mide 150° . Calcular el área del triángulo.

Resolución:



$$S = \frac{1}{2} a b \text{Sen} C$$

$$S = \frac{1}{2} (42)(32) \text{Sen} 150^\circ = \frac{1}{2} (42)(32) \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$S = 336 \text{ cm}^2$$

- El área de un ΔABC es de $90\sqrt{3} u^2$ y los senos de los ángulos A, B y C son proporcionales a los números 5, 7 y 8 respectivamente. Hallar el perímetro del triángulo.

Resolución:

Datos: $S = 90\sqrt{3}u^2$
 $\text{Sen}A=5n, \text{Sen}B=7n \text{ y } \text{Sen}C=8n$

Sabemos que:

$$\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C} \dots(\text{Ley de senos})$$

Entonces: $a = 5n, b=7n \text{ y } c=8n$
 $P = 10n$

$$90\sqrt{3} = \sqrt{(10n)(10n - 5n)(10n - 7n)(10n - 8n)}$$

$$90\sqrt{3} = \sqrt{(10n)(5n)(3n)(2n)}$$

$$90\sqrt{3} = 10n^2\sqrt{3} \rightarrow n = 3$$

Luego el perímetro es igual a $2p$
 $2p=2(10)(3) \rightarrow 2p = 60u$

- El diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC mide $\frac{26\sqrt{3}}{3}$ cm y la media geométrica de sus lados es $2\sqrt[3]{91}$. Calcular el área del triángulo.

Resolución:

La media geométrica de a,b y es: $\sqrt[3]{abc}$
 Del dato: $\sqrt[3]{abc} = 2\sqrt[3]{91} \rightarrow abc = 728$

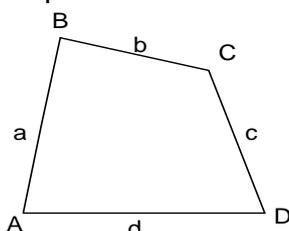
El radio de la circunferencia

Circunscrita mide $\frac{13\sqrt{3}}{3}$

Entonces: $S = \frac{abc}{4R} = \frac{728}{4\left(\frac{13\sqrt{3}}{3}\right)} = 14\sqrt{3}\text{cm}^2$

2. CUADRILATEROS

- 1º Area de un cuadrilátero convexo en términos de sus lados y ángulos opuestos

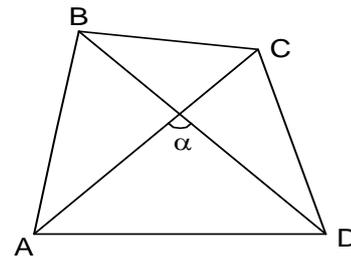


- Sea S el área del cuadrilátero y p su semiperímetro entonces:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\text{Cos}2\theta}$$

θ es igual a la semisuma de dos de sus ángulos opuestos.

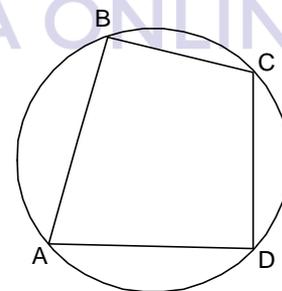
- 2º Area de un cuadrilátero convexo en términos de sus diagonales y el ángulo comprendido entre estas.



- Sea: $AC = d_1$ y $BD = d_2$
 Entonces:

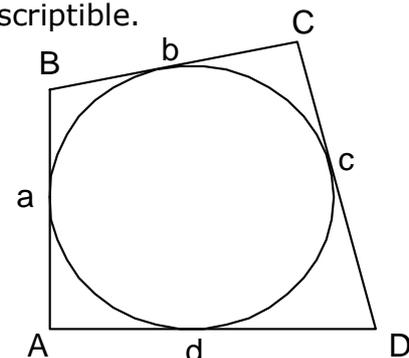
$$S = \frac{d_1 d_2}{2} \cdot \text{Sen} \alpha \dots(2)$$

- 3º Area de un cuadrilátero inscriptible (cuadrilátero cíclico)



$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \dots(3)$$

- 4º Area de un cuadrilátero circunscriptible.



Si un cuadrilátero es circunscriptible se cumple que: $a+c=b+d$ (Teorema de Pitot) entonces el semiperímetro (p) se puede expresar como:

$$p = a+c \text{ o } p=b+d$$

De éstas igualdades se deduce que: $p-a=c$, $p-c=a$, $p-b=d$ y $p-d=b$

Reemplazando en la fórmula (1) se obtiene:

$$S = \sqrt{abcd - abcd \cos^2 \theta}$$

$$S = \sqrt{abcd(1 - \cos^2 \theta)}$$

$$S = \sqrt{abcd \cdot \text{Sen}^2 \theta}$$

$$S = \sqrt{abcd} \text{ Sen} \theta \quad \dots(4)$$

No olvidar que θ es la suma de dos de sus ángulos opuestos.

5º Area de un cuadrilátero inscriptible y circunscriptible

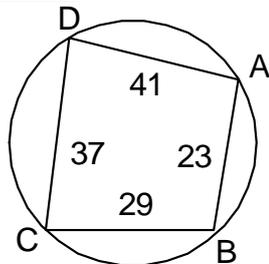
Si un cuadrilátero es circunscriptible ya sabemos que la semisuma de sus ángulos opuestos es igual a 90° y como a la vez es inscriptible aplicamos la fórmula (2) y obtenemos:

$$S = \sqrt{abcd}$$

Ejemplos:

- Los lados de un cuadrilátero inscriptible miden 23cm, 29cm, 37cm y 41cm. calcular su área.

Resolución



Sea: $a = 23$, $b=29$, $c=37$ y $d=41$ entonces

$$p = \frac{23+29+37+41}{2}$$

$$p = 65$$

Luego:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

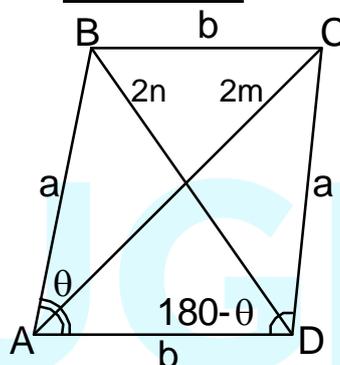
$$S = \sqrt{(65-23)(65-29)(65-37)(65-41)}$$

$$S = \sqrt{(42)(36)(28)(24)}$$

$$S = 1008 \text{cm}^2$$

- Las diagonales de un paralelogramo son $2m$ y $2n$ y un ángulo es θ . Hallar el área del paralelogramo (s), en términos de m , n y θ .

Resolución



Recordar que el área del paralelogramo es:

$$S = ab \text{ Sen} \theta \dots(1)$$

Aplicamos la ley de cosenos:

$$\Delta BAD: 4n^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \text{Cos} \theta$$

$$\Delta ADC: 4m^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \text{Cos}(180-\theta)$$

Rescatando:

$$4n^2 - 4m^2 = -2ab \cdot \text{Cos} \theta - 2ab \text{Cos} \theta$$

$$4(n^2 - m^2) = -4ab \cdot \text{Cos} \theta$$

$$ab = \frac{m^2 - n^2}{\text{Cos} \theta}$$

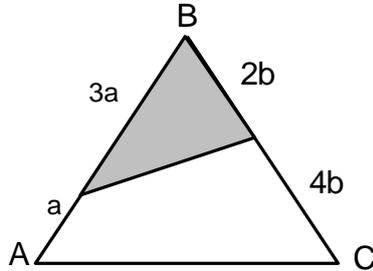
Reemplazando en (1)

$$S = \left(\frac{m^2 - n^2}{\text{Cos} \theta} \right) \text{Sen} \theta$$

$$S = (m^2 - n^2) \text{Tg} \theta$$

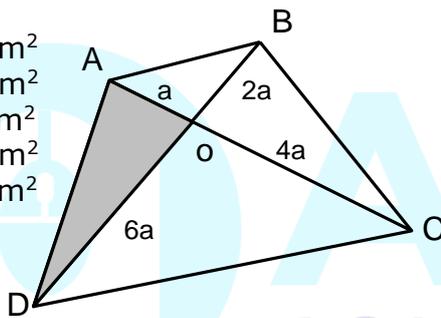
EJERCICIOS

1. La figura muestra un triángulo ABC cuya área es 60m^2 , determinar el área de la región sombreada.



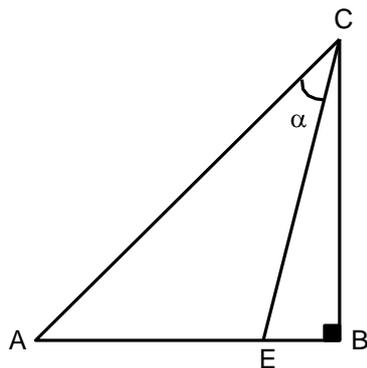
- a) 20m^2
- b) 15m^2
- c) 24m^2
- d) 18m^2
- e) 12m^2

2. En el cuadrilátero ABCD, el área del triángulo AOD es 21m^2 . Hallar el área del cuadrilátero ABCD.



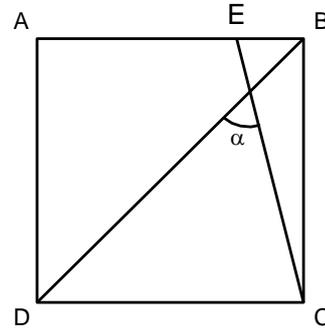
- a) 120m^2
- b) 158m^2
- c) 140m^2
- d) 115m^2
- e) 145m^2

3. Del gráfico, si ABC es un Triángulo y $AE = BC = 3EB$. Hallar: $\text{Sen } \alpha$.



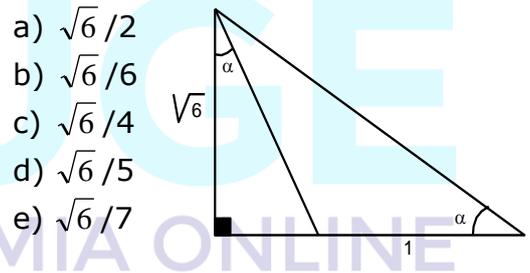
- a) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$
- b) $\frac{9\sqrt{10}}{20}$
- c) $\frac{7\sqrt{10}}{10}$
- d) $\frac{9\sqrt{10}}{50}$
- e) $\frac{7\sqrt{10}}{50}$

4. ABCD es un cuadrilátero y $AE = 3EB$. Hallar $\text{Sen } \alpha$.



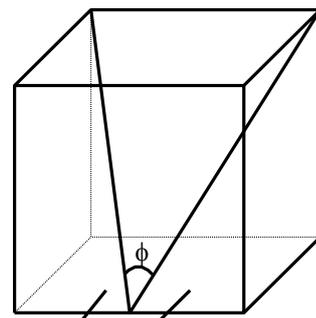
- a) $\frac{5\sqrt{34}}{34}$
- b) $\frac{7\sqrt{34}}{34}$
- c) $\frac{5\sqrt{34}}{17}$
- d) $\frac{3\sqrt{34}}{34}$
- e) $\frac{\sqrt{34}}{17}$

5. En la siguiente figura determinar "Tg α "



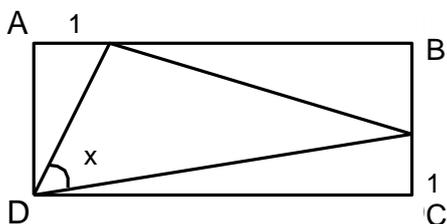
- a) $\sqrt{6}/2$
- b) $\sqrt{6}/6$
- c) $\sqrt{6}/4$
- d) $\sqrt{6}/5$
- e) $\sqrt{6}/7$

6. En el cubo mostrado. Hallar $\text{Sen } \phi$



- a) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$
- b) $\frac{3\sqrt{2}}{7}$
- c) $\frac{\sqrt{2}}{9}$
- d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
- e) 1

7. ABCD es un rectángulo BA=4m, BC = 3m
Hallar Tg x.

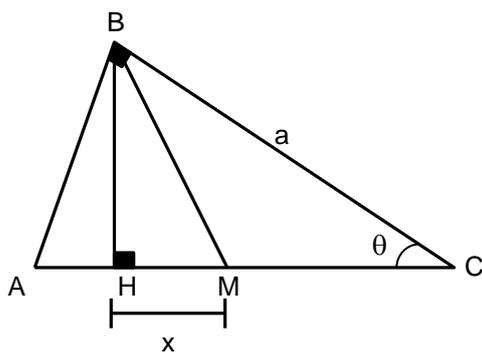


- a) 1,57 b) 2,52 c) 4,74
d) 2,12 e) 3,15

8. En un triángulo rectángulo (C= 90°) se traza la bisectriz de "A" que corta a BC en el punto "M". Luego en el triángulo ACH se traza CN mediana. Hallar el área del triángulo CNM.

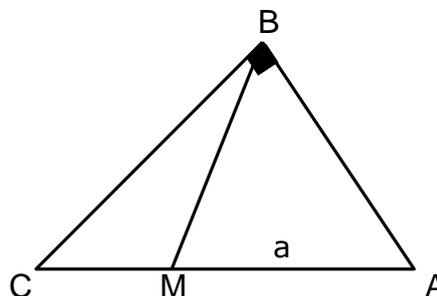
- a) $0,125b^2 \cos^2(0,5A) \operatorname{Sen}(0,5A)$
b) $0,125b^2 \operatorname{Sec}^2(0,5A)$
c) $0,125b^2 \operatorname{Sec}^2(0,5A) \operatorname{Cos}A$
d) $0,125b^2 \operatorname{Sec}^2(0,5A) \operatorname{Sen}A$
e) $0,125b^2 \cos^2(0,5A)$

9. Hallar "x" en la figura, en función de "a" y "θ".
BM: mediana
BH: altura



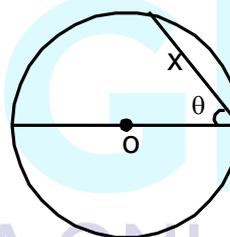
- a) $a \operatorname{Sen}\theta \cdot \operatorname{Ctg}\theta$ b) $a \operatorname{Sen}\theta \cdot \operatorname{Tg}\theta$
c) $a \operatorname{Sen}\theta \cdot \operatorname{Tg}2\theta$ d) $a \operatorname{Sen}2\theta \cdot \operatorname{Ctg}\theta$
e) $a \operatorname{Sen}\theta \cdot \operatorname{Ctg}2\theta$

10. En la figura se tiene que A-C=θ, AM=MC=a, halle el área de la región triangular ABC



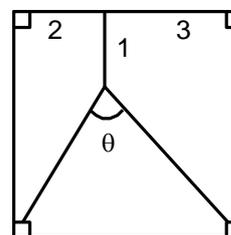
- a) $a^2 \operatorname{Sen}\theta$ b) $a^2 \operatorname{Cos}\theta$
c) $a^2 \operatorname{Tg}\theta$ d) $a^2 \operatorname{Ctg}\theta$
e) $a^2 \operatorname{Sec}\theta$

11. En la figura "o" es el centro de la circunferencia cuyo radio mide "r"; determine "x".



- a) $r \operatorname{Cos}\theta$ b) $r \operatorname{Sen}\theta$ c) $r \operatorname{Tg}\theta$
d) $2r \operatorname{Sen}\theta$ e) $2r \operatorname{Cos}\theta$

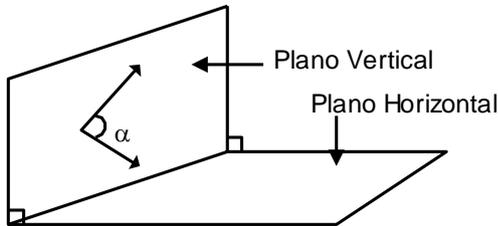
12. Determine el "Senθ", si ABCD es un cuadrado



- a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
d) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ e) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

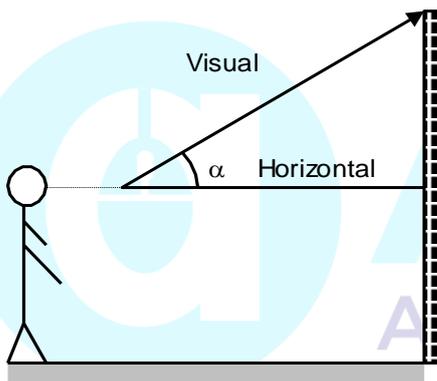
3. ÁNGULOS VERTICALES

Un ángulo se llama vertical, si está contenida en un plano vertical por ejemplo " α " es un ángulo vertical.



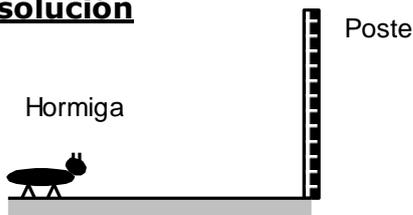
3.1 Angulo de Elevación (α)

Es un ángulo vertical que está formado por una línea que pasa por el ojo del observador y su visual por encima de esta.



Ejemplo:
Una hormiga observa al punto más alto de un poste con un ángulo de elevación " θ ". La hormiga se dirige hacia el poste y cuando la distancia que las separa se ha reducido a la tercera parte, la medida del nuevo ángulo de elevación para el mismo punto se ha duplicado. Hallar " θ ".

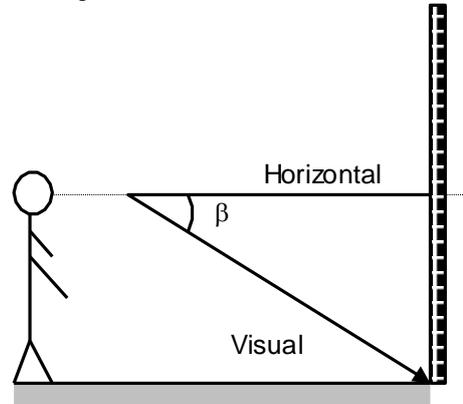
Resolución



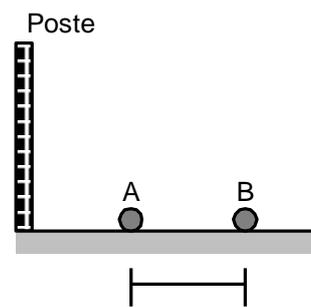
Luego:
 $2\theta =$ _____
 $\theta =$ _____

3.2 Angulo de Depresión (β)

Es un ángulo vertical que está formado por una línea horizontal que pasa por el ojo del observador y su línea visual por debajo de esta.



Ejemplo:
Desde la parte más alta de un poste se observa a dos piedras "A" y "B" en el suelo con ángulos de depresión de 53° y 37° respectivamente. Si el poste tiene una longitud de 12m. Hallar la distancia entre las piedras "A" y "B".



Luego:

EJERCICIOS

1. Al observar la parte superior de una torre, el ángulo de elevación es 53° , medido a 36m de ella, y a una altura de 12m sobre el suelo. Hallar la altura de la torre.
 - a) 24m
 - b) 48m
 - c) 50m
 - d) 60m
 - e) 30m
2. Desde una balsa que se dirige hacia un faro se observa la parte más alta con ángulo de elevación de 15° , luego de acercarse 56m se vuelve a observar el mismo punto con un ángulo de elevación de 30° . Determinar la altura del faro.
 - a) 14m
 - b) 21m
 - c) 28m
 - d) 30m
 - e) 36m
3. Al estar ubicados en la parte más alta de un edificio se observan dos puntos "A" y "B" en el mismo plano con ángulo de depresión de 37° y 53° . Se pide hallar la distancia entre estos puntos, si la altura del edificio es de 120m.
 - a) 70m
 - b) 90m
 - c) 120m
 - d) 160m
 - e) 100m
4. Un avión observa un faro con un ángulo de depresión de 37° si la altura del avión es 210 y la altura del faro es 120m. Hallar a que distancia se encuentra el avión.
 - a) 250m
 - b) 270m
 - c) 280m
 - d) 290m
 - e) 150m
5. Obtener la altura de un árbol, si el ángulo de elevación de su parte mas alta aumenta de 37° hasta 45° , cuando el observador avanza 3m hacia el árbol.
 - a) 3
 - b) 6
 - c) 8
 - d) 9
 - e) 10
6. Desde 3 puntos colineales en tierra A, B y C ($AB = BC$) se observa a una paloma de un mismo lado con ángulos de elevación de 37° , 53° y " α " respectivamente. Calcule " $Tg\alpha$ ", si vuela a una distancia de 12m.
 - a) 2
 - b) 4
 - c) 6
 - d) 8
 - e) 10
7. Un avión que vuela a 1Km sobre el nivel del mar es observado en 2 instantes; el primer instante a una distancia de 1,41Km de la vertical del punto de observación y el otro instante se halla 3,14Km de la misma vertical. Si el ángulo de observación entre estos dos puntos es " θ ".

Calcular: $E = Ctg\theta - Ctg2\theta$

Considere $\sqrt{2} = 1,41$; $\sqrt{3} = 1,73$

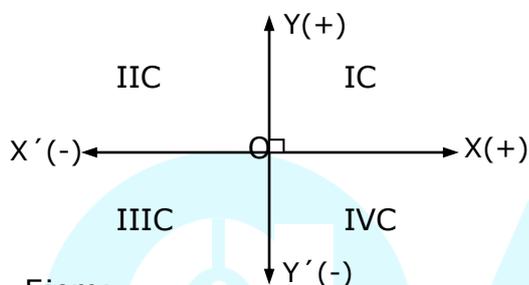
 - a) $\sqrt{2}$
 - b) $\sqrt{3}$
 - c) $\sqrt{5}$
 - d) $\sqrt{7}$
 - e) $\sqrt{10}$
8. Desde lo alto de un edificio se observa con un ángulo de depresión de 37° , dicho automóvil se desplaza con velocidad constante. Luego que avanza 28m acercándose al edificio es observado con un ángulo de depresión de 53° . Si de esta posición tarda en llegar al edificio 6seg. Hallar la velocidad del automóvil en m/s.
 - a) 2
 - b) 4
 - c) 6
 - d) 8
 - e) 10
9. Se observan 2 puntos consecutivos "A" y "B" con ángulos de depresión de 37° y 45° respectivamente desde lo alto de la torre. Hallar la altura de la altura si la distancia entre los puntos "A" y "B" es de 100m
 - a) 200m
 - b) 300m
 - c) 400m
 - d) 500m
 - e) 600m

GEOMETRÍA ANALÍTICA I

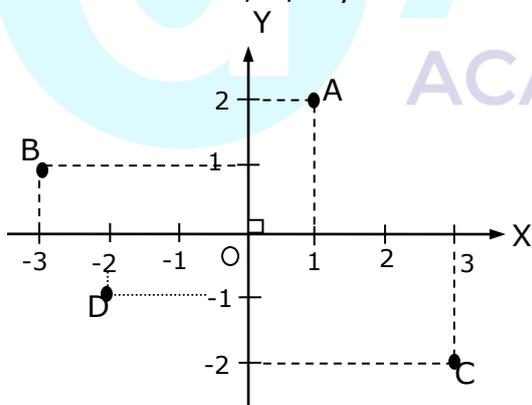
1. Sistema de Coordenadas Rectangulares (Plano Cartesiano o Bidimensional)

Este sistema consta de dos rectas dirigidas (rectas numéricas) perpendicular entre sí, llamados Ejes Coordinados. Sabemos que:

- $\overleftrightarrow{X'X}$: Eje de Abscisas (eje X)
- $\overleftrightarrow{Y'Y}$: Eje de Ordenadas (eje Y)
- O : Origen de Coordenadas



Ejem: Del gráfico determinar las coordenadas de A, B, C y D.



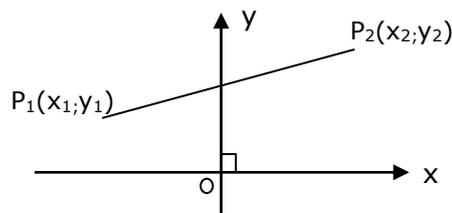
- Coordenadas de A: (1;2)
- Coordenadas de B: (-3;1)
- Coordenadas de C: (3;-2)
- Coordenadas de D: (-2;-1)

Nota

Si un punto pertenece al eje x, su ordenada igual a cero. Y si un punto pertenece al eje y, su abscisa es igual a cero.

2. Distancia entre Dos Puntos

La distancia entre dos puntos cualesquiera del plano es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de su diferencia de abscisas y su diferencia de ordenadas.



$$P_1 P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ejm: Hallar la distancia entre los puntos A y B si: A(3;8) y B(2;6).

Resolución

$$AB = \sqrt{(3 - 2)^2 + (8 - 6)^2} \rightarrow AB = \sqrt{5}$$

Ejm:

Hallar la distancia entre los puntos P y Q. P(-2;5) y Q(3;-1)

Resolución

$$PQ = \sqrt{(-2 - 3)^2 + (5 - (-1))^2}$$

$$PQ = \sqrt{(-5)^2 + (6)^2} = \sqrt{61}$$

Observaciones:

- Si P_1 y P_2 tienen la misma abscisa entonces la distancia entre dichos puntos se calcula tomando el valor absoluto de su diferencia de ordenadas.

Ejm:

$$A(5;6) \text{ y } B(5;2) \rightarrow AB = |6 - 2| \rightarrow AB = 4$$

$$C(-3;-2) \text{ y } D(-3;5) \rightarrow CD = |-1 - 5| \rightarrow CD = 6$$

$$E(5;8) \text{ y } F(5;-2) \rightarrow |EF = 8 - (-2)| \rightarrow EF = 10$$

- Si P_1 y P_2 tienen la misma ordenada entonces la distancia entre estos se calcula tomando el valor absoluto de su diferencia de abscisas.

Ejm:

$$A(8;-1) \text{ y } B(1;-1) \rightarrow AB = |8-1| \rightarrow AB=7$$

$$C(-4;7) \text{ y } D(-9;7) \rightarrow CD = |-4-(-9)| \rightarrow CD=5$$

Ejemplos:

1. Demostrar que los puntos $A(-2;-1)$, $B(2;2)$ y $C(5;-2)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

Resolución

Calculamos la distancia entre dos puntos.

$$AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$AC = \sqrt{(-2-5)^2 + (-1-(-2))^2} = \sqrt{50} = 2\sqrt{5}$$

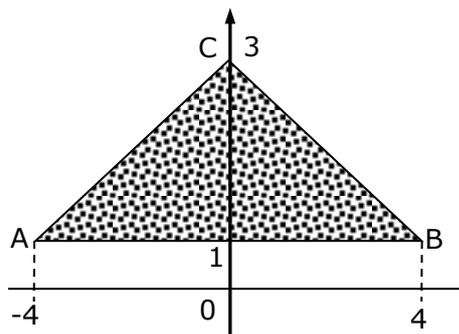
$$BC = \sqrt{(2-5)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{25} = 5$$

- Observamos que $AB = BC$ entonces ABC es un triángulo isósceles.

2. Hallar el área de la región determinada al unir los puntos: $A(-4;1)$, $B(4;1)$ y $C(0;3)$.

Resolución

Al unir dichos puntos se forma un triángulo. (ver figura)



$$\bullet S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot h}{2} \dots\dots\dots (1)$$

$$AB = |-4 - 4| = 8$$

$$h = |3 - 1| = 2$$

- Reemplazando en (1):

$$S_{\Delta ABC} = \frac{(8)(2)}{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = 8u^2$$

3. Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son: $A(-3;-1)$, $B(0;3)$, $C(3;4)$ y $D(4;-1)$.

Resolución

$$\bullet AB = \sqrt{(-3-0)^2 + (-1-3)^2} = 5$$

$$\bullet BC = \sqrt{(0-3)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{10}$$

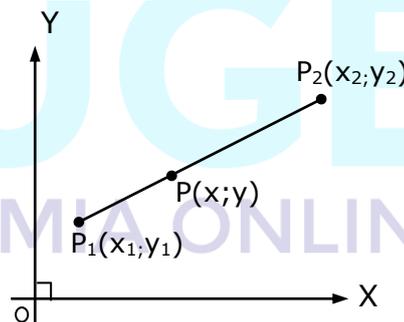
$$\bullet CD = \sqrt{(3-4)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{26}$$

$$\bullet DA = \sqrt{(4-(-3))^2 + (-1-(-1))^2} = 7$$

El perímetro es igual a:

$$\sqrt{26} + \sqrt{10} + 12$$

3. División de un Segmento en una Razón Dada.



- Sean $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$ los extremos de un segmento.

- Sea $P(x; y)$ un punto (colineal con P_1P_2 en una razón) tal que divide al segmento P_1P_2 en una razón r . es decir:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2}$$

entonces las coordenadas de P son:

$x = \frac{x_1 + r \cdot x_2}{1 + r}$
$y = \frac{y_1 + r \cdot y_2}{1 + r}$

Nota

Si P es externo al segmento P₁P₂ entonces la razón (r) es negativa.

Ejm:

Los puntos extremos de un segmento son A(2;4) y B(8;-4). Hallar las coordenadas de un punto P tal que:

$$\frac{AP}{PB} = 2$$

Resolución:

Sean (x;y) las coordenadas de P, entonces de la fórmula anterior se deduce que:

$$x = \frac{x_1 + r \cdot x_2}{1 + r} \quad x = \frac{2 + 2(8)}{1 + 2}$$

$$x = \frac{18}{3} = 6$$

$$y = \frac{y_1 + r \cdot y_2}{1 + r} \quad y = \frac{4 + 2(-4)}{1 + 2}$$

$$y = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore P\left(6; -\frac{4}{3}\right)$$

Ejm:

Los puntos extremos de un segmento son A(-4;3) y B(6;8). Hallar las coordenadas de un punto P tal que:

$$\frac{BP}{PA} = \frac{1}{3}$$

Resolución:

$$x = \frac{x_1 + r \cdot x_2}{1 + r}$$

$$x = \frac{6 + \left(\frac{1}{3}\right)(-4)}{1 + \frac{1}{3}}$$

$$x = \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + r \cdot y_2}{1 + r}$$

$$y = \frac{8 + \left(\frac{1}{3}\right)(3)}{1 + \frac{1}{3}}$$

$$y = \frac{27}{4}$$

$$\therefore P\left(\frac{7}{2}; \frac{27}{4}\right)$$

Ejm:

A(-2;3), B(6;-3) y P(x;y) son tres puntos colineales, si $\frac{AP}{PB} = -2$.

Hallar:

$$x + y$$

Resolución:

Del dato: r=-2, entonces:

$$x = \frac{x_1 + r \cdot x_2}{1 + r}$$

$$x = \frac{-2 + (-2)(6)}{1 + (-2)}$$

$$x = 14$$

$$y = \frac{x_2 + y_2}{1 + r}$$

$$y = \frac{3 + (-2)(-3)}{1 + (-2)}$$

$$y = -9$$

$$\therefore x + y = 5$$

Observación

Si la razón es igual a 1 es decir $\frac{P_1P}{PP_2} = 1$, significa que:

P₁P=PP₂, entonces P es **punto medio** de P₁P₂ y al reemplazar r=1 en las formas dadas se obtiene:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ejm:

Hallar las coordenadas del punto medio P de un segmento cuyos extremos son: A(2;3) y B(4;7).

Resolución:

Sea P(x; y) el punto medio de AB, entonces:

$$x = \frac{2+4}{2} \rightarrow x = 3$$

$$y = \frac{3+7}{2} \rightarrow y = 5$$

∴ P(3; 5)

Ejm:

Si P(x; y) es el punto medio de CD. Hallar: x-y. C(-5; 6) y D(-1;-10).

Resolución:

$$x = \frac{-5+(-1)}{2} \rightarrow x = -3$$

$$y = \frac{6+(-10)}{2} \rightarrow y = -2$$

P(-3;-2)

∴ x-y = -1

Ejm:

El extremo de un segmento es (1;-9) y su punto medio es P(-1;-2). Hallar las coordenadas del otro extremo.

Resolución:

Sean (x₂;y₂) las coordenadas del extremo que se desea hallar como P(-1;-2) es el punto medio, se cumple que:

$$-1 = \frac{1+x_2}{2} \rightarrow x_2 = -3$$

$$-2 = \frac{-9+y_2}{2} \rightarrow y_2 = 5$$

Las coordenadas del otro extremo son: (-3;5)

Baricentro de un Triángulo

Sea A(x₁;y₂), B(x₂;y₂), C(x₃;y₃) los vértices del triángulo ABC, las coordenadas de su baricentro G son:

$$G(x;y) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

Área de un Triángulo

Sea A(x₁;y₂), B(x₂;y₂), C(x₃;y₃) los vértices de un triángulo ABC, el área (S) del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_4 \end{vmatrix}$$

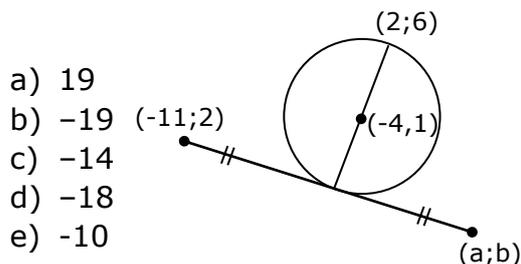
$$S = \frac{1}{2} |x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_4 - x_2 \cdot y_1 - x_3 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_3|$$

EJERCICIOS

- Calcular la distancia entre cada uno de los siguientes pares de puntos:
 - (5;6) ^ (-2;3)
 - (3;6) ^ (4;-1)
 - (1;3) ^ (1;-2)
 - (-4;-12) ^ (-8;-7)
- Un segmento tiene 29 unidades de longitud si el origen de este segmento es (-8;10) y la abscisa del extremo del mismo es 12, calcular la ordenada sabiendo que es un número entero positivo.
 - 12
 - 11
 - 8
 - 42
 - 31

3. Hallar las coordenadas cartesianas de Q, cuya distancia al origen es igual a 13u. Sabiendo además que la ordenada es 7u más que la abscisa.
- a) (-12; 5)
 b) (12; 5)
 c) (5; 12)
 d) (-5; -12)
 e) a y b son soluciones
4. La base menor de un trapezio isósceles une los puntos (-2;8) y (-2;4), uno de los extremos de la base mayor tiene por coordenadas (3;-2). La distancia o longitud de la base mayor es:
- a) 6u b) 7u c) 8u
 d) 9u e) 10u
5. Calcular las coordenadas de los baricentros de los siguientes triángulos:
- a) (2;5); (6;4); (7;9)
 b) (7;-8); (-12;12); (-16;14)
6. Calcular las coordenadas del punto "p" en cada segmentos dada las condiciones:
- a) A(0;7); B(6;1) / AP = 2PB
 b) A(-3;2); B(4;9) / 3AP = 4PB
 c) A(-1;-4); B(7;4) / 5AP = 3PB
7. En un triángulo ABC las coordenadas del baricentro son (6;7) el punto medio AB es (4;5) y de CB(2;3) determinar la suma de las coordenadas del vértice "C".
- a) 21 b) 20 c) 31
 d) 41 e) 51
8. Se tienen un triángulo cuyos vértices son los puntos A(2;4); B(3;-1); C(-5;3). Hallar la distancia de A hasta el baricentro del triángulo.
- a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2}/2$
 d) $4\sqrt{3}$ e) $\sqrt{3}$

9. En la figura determinar: a+b



- a) 19
 b) -19
 c) -14
 d) -18
 e) -10

10. La base de un triángulo isósceles ABC son los puntos A(1;5) y C(-3;1) sabiendo que B pertenece al eje "x", hallar el área del triángulo.

a) $10u^2$ b) $11u^2$ c) $12u^2$
 d) $13u^2$ e) $24u^2$

11. Reducir, "M" si:

A=(3;4) B=(5;6) C=(8;10)
 D=(0;0) E=(2;2)

$$M = \frac{\sqrt{2} \cdot AB \cdot BC \cdot AD \cdot BE \cdot CE}{\sqrt{5} \cdot AE}$$

- a) 1 b) 6 c) 7
 d) 5 e) 4

12. El punto de intersección de las diagonales de un cuadrado es (1;2), hallar su área si uno de sus vértices es: (3;8).

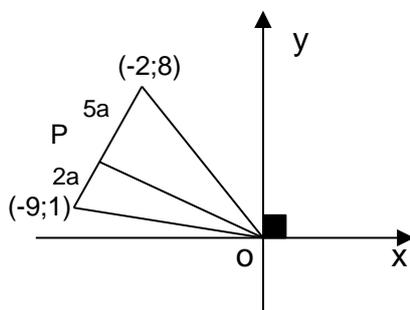
a) 20 b) 80 c) 100
 d) 40 e) 160

13. Los vértices de un cuadrilátero se definen por: (2; 1), (-2; 2), (3; -2), (-3; -3). Hallar la diferencia de las longitudes de las diagonales

a) $\sqrt{41}$ b) $2\sqrt{41}$ c) 0
 d) $\frac{\sqrt{41}}{2}$ e) $\frac{3\sqrt{41}}{2}$

14. Del gráfico siguiente determine las coordenadas del punto P.

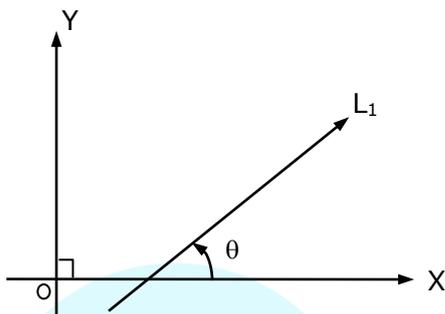
- a) $(-7; 3)$
- b) $(-8; 3)$
- c) $(-5; 2)$
- d) $(-4; 5)$
- e) $(-3; 2)$



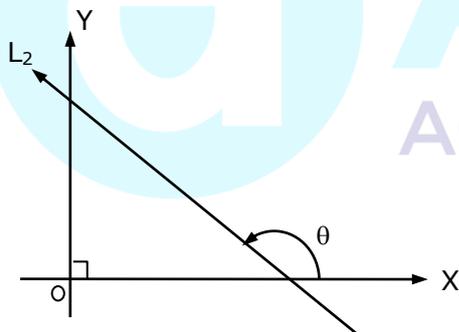
GEOMETRÍA ANALÍTICA II

1. PENDIENTE DE UNA RECTA

Se denomina pendiente o coeficiente angular de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación. Generalmente la pendiente se representa por la letra m , dicho valor puede ser positivo o negativo, dependiendo si el ángulo de inclinación es agudo u obtuso respectivamente.



- Pendiente de L_1 : $m_1 = \text{Tg}\theta$
En este caso $m_1 > 0$
(+)



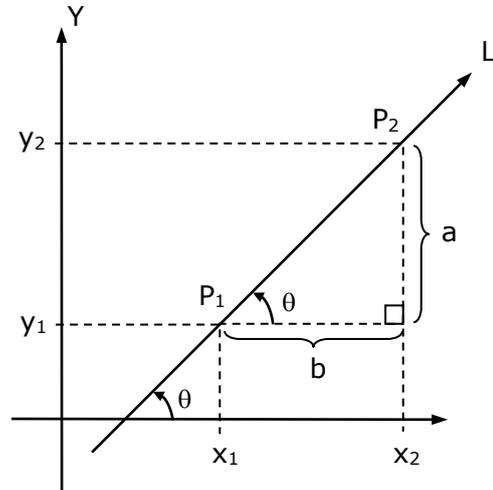
- Pendiente de L_2 : $m_1 = \text{Tg}\theta$
En este caso $m_2 < 0$
(-)

Nota: La pendiente de las rectas horizon-tales es igual a cero (y viceversa) las rectas verticales no tienen pendiente.

Otra manera de hallar la pendiente de una recta es la siguiente:
Sean $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$ dos puntos de la recta, entonces la pendiente (m) se calcula aplicando la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ Si } x_1 \neq x_2$$

Demostración:



Demostración:

- Observamos de la figura que θ es el ángulo de inclinación de L , entonces:

$$m = \text{Tg}\theta \dots\dots(1)$$

- De la figura también se observa que:

$$\text{Tg}\theta = \frac{a}{b} \dots\dots(2)$$

Pero: $a = y_2 - y_1$; $b = x_2 - x_1$

Reemplazando en (1) se obtiene:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo:

- Hallar la pendiente de una recta que pasa por $(2; -2)$ y $(-1; 4)$.

Resolución:

Sea $P_1(2; -2)$ y $P_2(-1; 4)$; entonces

$$m = \frac{4 - (-2)}{(-1) - (2)} = \frac{6}{-3} \rightarrow m = -2$$

- Una recta pasa por los puntos $(2; 3)$ y $(6; 8)$ y $(10; b)$.
Hallar el valor de b .

Resolución:

Como la recta pasa por los puntos (2;3) y (6;8) entonces su pendiente es:

$$m = \frac{8-3}{6-2} \rightarrow m = \frac{5}{4} \dots\dots (1)$$

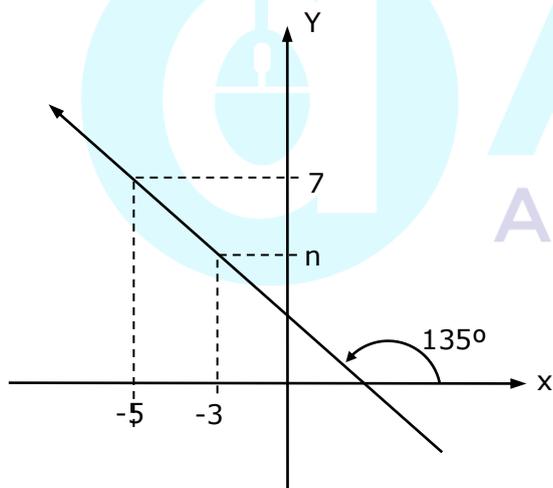
Como la recta pasa por (2,3) y (10,b) entonces su pendiente es:

$$m = \frac{b-3}{10-2} \rightarrow m = \frac{b-3}{8} \dots\dots (2)$$

De (1) y (2): $\frac{b-3}{8} = \frac{5}{4} \rightarrow b=13$

- El ángulo de inclinación de una recta mide 135° , si pasa por los puntos (-3; n) y (-5;7). Hallar el valor de n.

Resolución:



Como el ángulo de inclinación mide 135° entonces la pendiente es:

$$m = \text{Tg}135^\circ \rightarrow m = -1$$

Conociendo dos puntos de la recta también se puede hallar la pendiente:

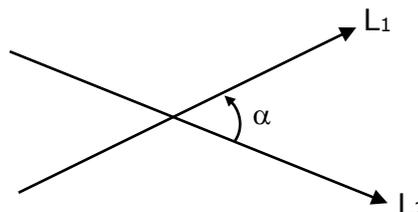
$$m = \frac{7-n}{-5-(-3)} \rightarrow m = \frac{7-n}{-2}$$

Pero $m = -1$, entonces:

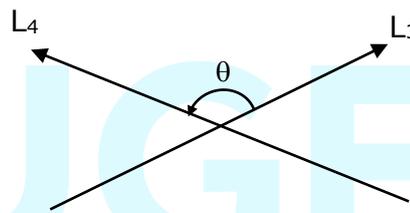
$$-1 = \frac{7-n}{-2} \rightarrow 2=7-n \rightarrow n=5$$

2. ANGULO ENTRE DOS RECTAS

Quando dos rectas orientadas se intersectan, se forman cuatro ángulos; se llama ángulo de dos rectas orientadas al formado por los lados que se alejan del vértice.



α es el ángulo que forma las rectas L_1 y L_2

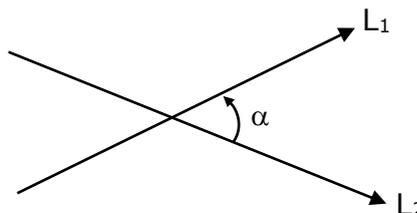


θ es el ángulo que forman las rectas L_3 y L_4 .

Observar que cuando se habla de ángulo entre dos rectas se considera a los ángulos positivos menores o iguales que 180° .

a. Cálculo del Ángulo entre dos Rectas

Conociendo las pendientes de las rectas que forman el ángulo se puede calcular dicho ángulo.



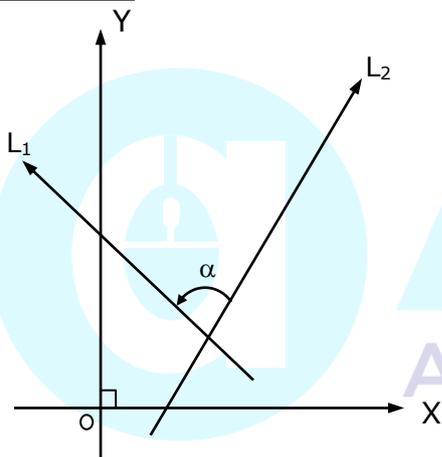
$$\text{Tg}\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

m_1 es la pendiente de la recta final (L_1) y m_2 es la pendiente de la recta inicial (L_2). Denominamos a L_1 **Recta Final**, porque de acuerdo con la figura el lado final del ángulo θ está en L_1 , lo mismo sucede con L_2 .

Ejemplo:

- Calcular el ángulo agudo formado por dos rectas cuyas pendientes son: -2 y 3.

Resolución:



Sea: $m_1 = -2$ y $m_2 = 3$

Entonces:

$$\text{Tg}\alpha = \frac{-2 - 3}{1 + (-2)(3)} \rightarrow \text{Tg}\alpha = 1$$

$$\alpha = 45^\circ$$

- Dos rectas se intersectan formando un ángulo de 135° , sabiendo que la recta final tiene pendiente igual a -3. Calcular la pendiente de la recta inicial.

Resolución:

Sea: $m_1 =$ Pendiente inicial y

$m_2 =$ Pendiente final = -3

Entonces:

$$\text{Tg}135^\circ = \frac{-3 - m_1}{1 + (-3)m_1} \rightarrow -1 = \frac{-3 - m_1}{1 - 3m_1}$$

$$\begin{aligned} -1 + 3m_1 &= -3 - 3m_1 \rightarrow 4m_1 = -2 \\ &\rightarrow m_1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Observaciones:

- Si dos rectas L_1 y L_2 son **paralelas** entonces tienen igual pendiente.

$$L_1 // L_2 \iff m_1 = m_2$$

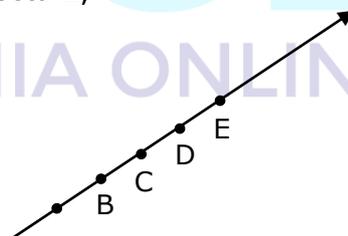
- Si dos rectas L_1 y L_2 son **perpendiculares** entonces el producto de sus pendientes es igual a -1.

$$L_1 \perp L_2 \iff m_1 \cdot m_2 = -1$$

3. RECTA

La recta es un conjunto de puntos, tales que cuando se toman dos puntos cualesquiera de ésta, la pendiente no varía.

Por ejemplo: Si A, B, C y D son puntos de la recta L,



entonces se cumple que:

$$m_{AB} = m_{CD} = m_{BD} \dots = m_L$$

Ecuación de la Recta

Para determinar la ecuación de una **recta** debemos de conocer su pendiente y un punto de paso de la recta, o también dos puntos por donde pasa la recta.

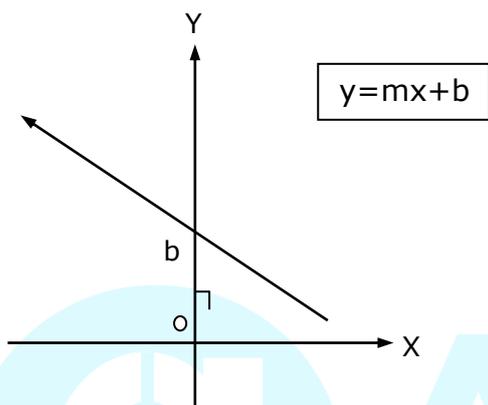
- a) **Ecuación de una recta cuya pendiente es m y un punto de paso es $p_1(x_1; y_1)$.**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

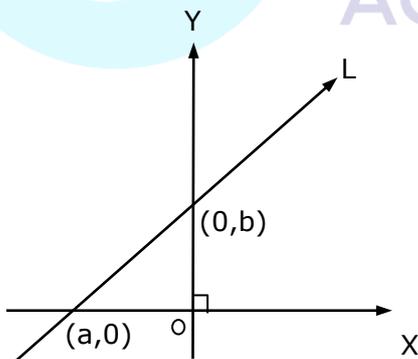
b) Ecuación de una recta conociendo dos puntos de paso $p_1(x_1, y_1)$ y $p_2(x_2, y_2)$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

c) Ecuación de una recta cuya pendiente es m e intersección con el eje de ordenadas es $(0; b)$.



d) Ecuación de una recta conociendo las intersecciones con los ejes coordenados.



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

A esta ecuación se le denomina: **Ecuación Simétrica de la recta.**

e) Ecuación General de la Recta

La forma general de la ecuación de una recta es:

$$Ax + By + C = 0$$

en donde la pendiente es:

$$m = -\frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

Ejemplo:

- Hallar la ecuación general de una recta que pasa por el punto $(2, 3)$ y su pendiente es $1/2$.

Resolución:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\rightarrow y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\rightarrow 2y - 6 = x - 2$$

La ecuación es: $x - 2y + 4 = 0$

- La ecuación de una recta es: $2x + 3y - 6 = 0$, hallar su pendiente y los puntos de intersección con los ejes coordenados.

Resolución:

Ecuación:

$$2x + 3y - 6 = 0$$

La pendiente es: $m = -\frac{2}{3}$

$$2x + 3y = 6$$

$$\frac{2x + 3y}{6} = 1$$

$$\rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

Los puntos de intersección con los ejes coordenados son:

$(3; 0)$ y $(0; 2)$

EJERCICIOS

1. Una recta que pasa por los puntos $(\sqrt{2}; \sqrt{6})$ y $(1; \sqrt{3})$ tiene como pendiente y ángulo de inclinación a:
a) $\sqrt{3}, 60^\circ$ b) $1, 30^\circ$ c) $2, 45^\circ$
d) $5, 37^\circ$ e) $4, 60^\circ$
2. Hallar la pendiente de la recta: $4x+7y-3=0$.
a) $-\frac{1}{7}$ b) $-\frac{2}{7}$ c) $-\frac{3}{7}$
d) $-\frac{4}{7}$ e) $-\frac{5}{7}$
3. Señale la ecuación de la recta que pase por $(3; 2)$ y cuyo ángulo de inclinación sea de 37° .
a) $3x-4y-1=0$ b) $2x+3y-12=0$
c) $x-y-1=0$ d) $x+y+1=0$
e) $x+y-1=0$
4. Señale la ecuación de la recta que pase por los puntos P $(1;5)$ y Q $(-3;2)$.
a) $3x+4y-17=0$
b) $3x-4x+17=0$
c) $3x-4x-17=0$
d) $2x+y+4=0$
e) $x+y-2=0$
5. Señale la ecuación de la recta que pasando por $(1;2)$ sea paralela a la recta de ecuación: $3x+y-1=0$.
a) $3x+y-5=0$
b) $x-y-5=0$
c) $3x-y+5=0$
d) $2x+2y-5=0$
e) $x+y-1=0$
6. Señale la ecuación de la recta que pasando por $(-3;5)$ sea perpendicular a la recta de ecuación: $2x-3y+7=0$.
a) $x+y+7=0$ b) $2x+2y+3=0$
c) $x+y+8=0$ d) $3x+2y-1=0$
e) $x+3y-4=0$
7. Dada la recta L: $x+2y-6=0$ ¿Cuál es la longitud del segmento que determina dicha recta entre los ejes cartesianos?
a) $\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{5}$ c) $3\sqrt{5}$
- d) $4\sqrt{5}$ e) $5\sqrt{5}$
8. Hallar el área del triángulo rectángulo formado por los ejes coordenados y la recta cuya ecuación es: $5x+4y+20=0$.
a) 5 b) 10 c) 15
d) 20 e) 25
9. Señale la suma de coordenadas del punto de intersección de las rectas:
 $L_1: 3x-y-7=0$ con $L_2: x-3y-13=0$
a) -1 b) -2 c) -3
d) -4 e) -5
10. Dada la recta "L" con ecuación $3x+4y-4=0$ y el punto P $(-2,-5)$, encontrar la distancia más corta de P a la recta L.
a) 2 b) 2 c) 6
d) 8 e) 10
11. Calcular el área del triángulo formado por
 $L_1: x=4$
 $L_2: x+y=8$ y el eje x.
a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10
12. Calcular el área que se forma al graficar: $y=|x|$, $y=12$.
a) 144 b) 68 c) 49
d) 36 e) 45
13. Señale la ecuación de a recta mediatriz del segmento \overline{AB} : Si A $(-3;1)$ y B $(5;5)$.
a) $2x+y-5=0$
b) $x+2y-5=0$
c) $x+y-3=0$
d) $2x-y-5=0$
e) $x+y-7=0$
14. Dado el segmento AB, con extremos: A $(2; -2)$, B $(6; 2)$
Determinar la ecuación de la recta con pendiente positiva que pasa por el origen y divide el segmento en dos partes cuyas longitudes están en la relación 5 a 3.
a) $x-9y=0$
b) $x+9y=0$
c) $9x+y=0$
d) $9x-y=0$
e) $x-y=0$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE CUALQUIER MAGNITUD

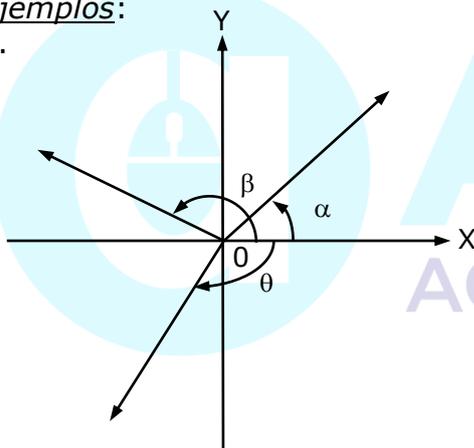
4. ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

Un ángulo trigonométrico está en Posición Normal si su vértice está en el origen de coordenadas y su lado inicial coincide con el lado positivo del eje X. Si el lado final está en el segundo cuadrante, el ángulo se denomina Angulo del Segundo Cuadrante y análogamente para los otros cuadrantes.

Si el lado final coincide con un eje se dice que el ángulo no pertenece a ningún cuadrante.

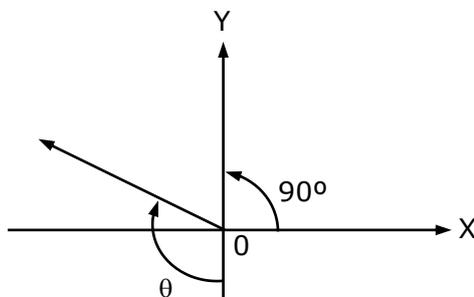
Ejemplos:

a.



α	\in	IC
β	\in	IIC
θ	\in	IIIC

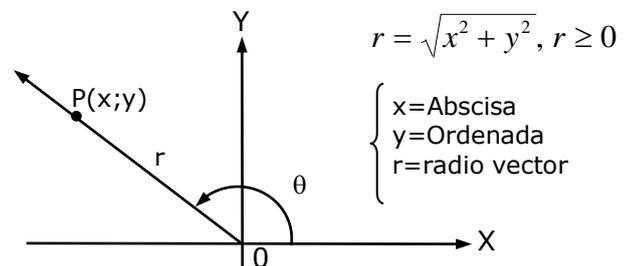
b.



$90^\circ \notin$ a ningún cuadrante
 ϕ no está en posición normal

5. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

Si θ es un ángulo cualquiera en posición normal, sus razones trigonométricas se definen como sigue:



Nota:

El radio vector siempre es positivo

$$\text{Sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{ORDENADA}}{\text{RADIO VECTOR}}$$

$$\text{Cos}\theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{ABSCISA}}{\text{RADIO VECTOR}}$$

$$\text{Tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{ORDENADA}}{\text{ABSCISA}}$$

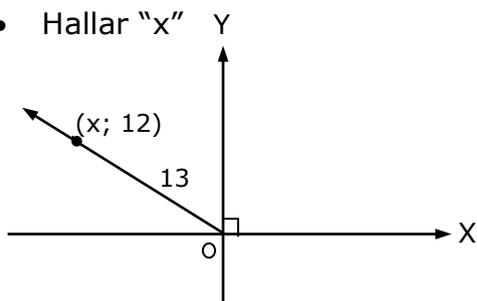
$$\text{Ctg}\theta = \frac{x}{y} = \frac{\text{ABSCISA}}{\text{ORDENADA}}$$

$$\text{Sec}\theta = \frac{r}{x} = \frac{\text{RADIO VECTOR}}{\text{ABSCISA}}$$

$$\text{Csc}\theta = \frac{r}{y} = \frac{\text{RADIO VECTOR}}{\text{ORDENADA}}$$

Ejemplos:

- Hallar "x" Y



Resolución:

Aplicamos la Fórmula: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Que es lo mismo $r^2 = x^2 + y^2$
 $x^2 + y^2 = r^2$

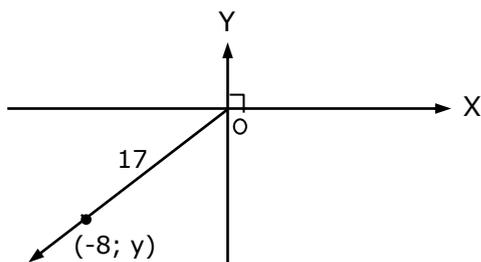
Reemplazamos "y" por 12 y "r" por 13 en la igualdad anterior

$$\begin{aligned} x^2 + 12^2 &= 13^2 \\ x^2 + 144 &= 169 \\ x^2 &= 25 \\ x &= \pm 5 \end{aligned}$$

Como "x" esta en el segundo cuadrante entonces tiene que ser negativo

$$x = -5$$

- Hallar "y"



Resolución:

Análogamente aplicamos $x^2 + y^2 = r^2$

Reemplazamos "x" por 8 y "r" por 17 en la igualdad anterior.

$$\begin{aligned} (-8)^2 + y^2 &= 17^2 \\ 64 + y^2 &= 289 \\ y^2 &= 225 \\ y &= \pm 15 \end{aligned}$$

Como "y" esta en el tercer cuadrante entonces tiene que ser negativo.

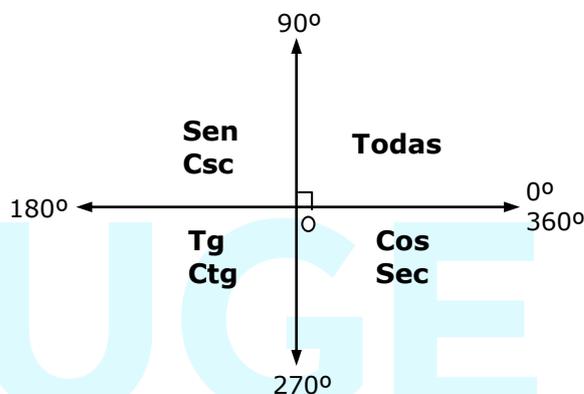
$$y = -15$$

6. SIGNOS DE LA R.T. EN CADA CUADRANTE

Para hallar los signos en cada cuadrante existe una regla muy práctica

Regla Práctica

Son Positivos:



Ejemplos:

- ¿Qué signo tiene?

$$E = \frac{\text{Sen}100^\circ \cdot \text{Cos}200^\circ}{\text{Tg}300^\circ}$$

Resolución:

- $100^\circ \in \text{IIC} \rightarrow \text{Sen}100^\circ$ es (+)
- $200^\circ \in \text{IIIC} \rightarrow \text{Cos}200^\circ$ es (-)
- $300^\circ \in \text{IVC} \rightarrow \text{Tg}300^\circ$ es (-)

Reemplazamos $E = \frac{(+)(-)}{(-)}$

$$E = \frac{(-)}{(-)}$$

$$E = (+)$$

- Si $\theta \in \text{IIC} \wedge \text{Cos}^2\theta = \frac{2}{9}$. Hallar $\text{Cos}\theta$.

Resolución:

Despejamos $\text{Cos}\theta$ de la igualdad dada.

$$\cos^2\theta = \frac{2}{9}$$

$$\cos\theta = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Como $\theta \in \text{III}$ entonces $\cos\theta$ es negativo, por lo tanto:

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

- Si $\theta \in \text{IVC}$ \wedge $\text{Tg}^2\theta = \frac{4}{25}$. Hallar $\text{Tg}\theta$

Resolución:

Despejamos $\text{Tg}\theta$ de la igualdad dada:

$$\text{Tg}^2\theta = \frac{4}{25}$$

$$\text{Tg}\theta = \pm \frac{2}{5}$$

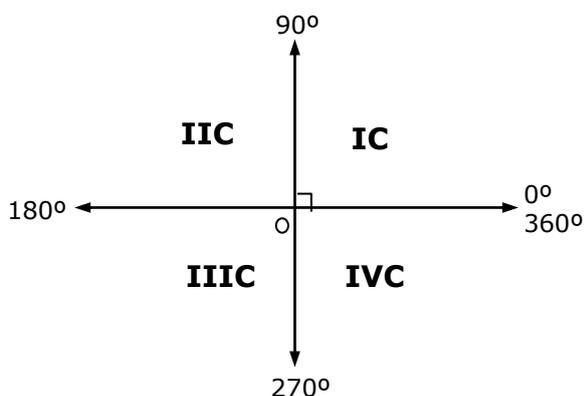
Como $\theta \in \text{IVC}$ entonces la $\text{Tg}\theta$ es negativa, por lo tanto:

$$\text{Tg}^2 = -\frac{2}{5}$$

7. ÁNGULO CUADRANTAL

Un ángulo en posición normal se llamará Cuadrantal cuando su lado final coincide con un eje. En consecuencia no pertenece a ningún cuadrante.

Los principales ángulos cuadrantes son: 0° , 90° , 180° , 270° y 360° , que por "comodidad gráfica" se escribirán en los extremos de los ejes.



Propiedades

Si θ es un ángulo en posición normal positivo y menor que una vuelta entonces se cumple: $(0^\circ < \theta < 360^\circ)$

Si $\theta \in \text{IC}$	\rightarrow	$0^\circ < \theta < 90^\circ$
Si $\theta \in \text{IIC}$	\rightarrow	$90^\circ < \theta < 180^\circ$
Si $\theta \in \text{IIIIC}$	\rightarrow	$180^\circ < \theta < 270^\circ$
Si $\theta \in \text{IVC}$	\rightarrow	$270^\circ < \theta < 360^\circ$

Ejemplos:

- Si $\theta \in \text{IIC}$. En qué cuadrante está $2\theta/3$.

Resolución:

$$\text{Si } \theta \in \text{IIC} \rightarrow 180^\circ < \theta < 270^\circ$$

$$60^\circ < \frac{\theta}{3} < 90^\circ$$

$$120^\circ < \frac{2\theta}{3} < 180^\circ$$

Como $2\theta/3$ está entre 120° y 180° , entonces **pertenece al II cuadrante.**

- Si $\alpha \in \text{IIC}$. A qué cuadrante pertenece $\frac{\alpha}{2} + 70^\circ$

Resolución:

$$\text{Si } \alpha \in \text{IIC} \rightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

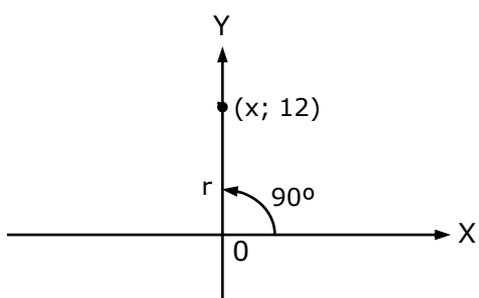
$$45^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$$

$$115^\circ < \frac{\alpha}{2} + 70^\circ < 180^\circ$$

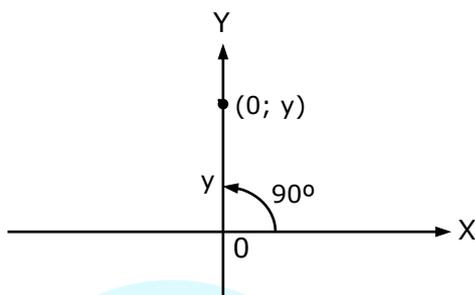
Como $\frac{\alpha}{2} + 70^\circ$ esta entre 115° y 160° , entonces **pertenece al II Cuadrante.**

R.T. de Ángulos Cuadrantales

Como ejemplo modelo vamos a calcular las R.T. de 90° , análogamente se van a calcular las otras R.T. de 0° , 180° , 270° y 360° .



Del gráfico observamos que $x=0 \wedge r=y$, por tanto:



$$\text{Sen}90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{y}{y} = 1$$

$$\text{Cos}90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{y} = 0$$

$$\text{Tg}90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{y}{0} = \text{No definido} = \text{ND}$$

$$\text{Ctg}90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{y} = 0$$

$$\text{Sec}90^\circ = \frac{r}{x} = \frac{y}{0} = \text{No definido} = \text{ND}$$

$$\text{Csc}90^\circ = \frac{r}{y} = \frac{y}{y} = 1$$

R.T	0°	90°	180°	270°	360°
Sen	0	1	0	-1	0
Cos	1	0	-1	0	1
Tg	0	ND	0	ND	0
Ctg	ND	0	ND	0	ND
Sec	1	ND	0	ND	1
Csc	ND	1	ND	-1	ND

Ejemplos:

• Calcular: $E = \frac{2\text{Sen}(\pi/2) - \text{Cos}\pi}{\text{Ctg}(3\pi/2) + \text{Sec}2\pi}$

Resolución:

Los ángulos están en radianes, haciendo la conversión obtenemos:

$$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

$$\pi = 180^\circ$$

$$3\frac{\pi}{2} = 270^\circ$$

$$2\pi = 360^\circ$$

Reemplazamos:

$$E = \frac{2\text{Sen}90^\circ - \text{Cos}180^\circ}{\text{Ctg}270^\circ + \text{Sec}360^\circ}$$

$$E = \frac{2(1) - (-1)}{0 + 1}$$

E = 3

• Calcular el valor de E para $x=45^\circ$

$$E = \frac{\text{Sen}2x + \text{Cos}6x}{\text{Tg}4x + \text{Cos}8x}$$

Resolución:

Reemplazamos $x=45^\circ$ en E:

$$E = \frac{\text{Sen}90^\circ + \text{Cos}270^\circ}{\text{Tg}180^\circ + \text{Cos}360^\circ}$$

$$E = \frac{1 + 0}{0 + 1}$$

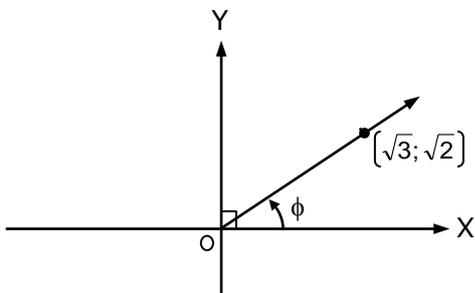
$$E = \frac{1}{1}$$

E = 1

EJERCICIOS

1. Del gráfico mostrado, calcular:

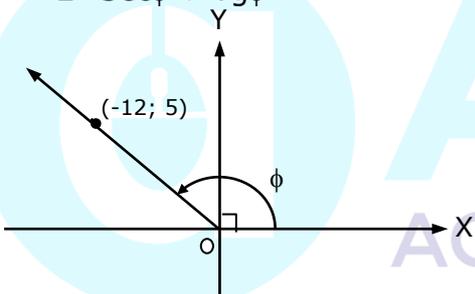
$$E = \text{Sen}\phi * \text{Cos}\phi$$



- a) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{5}$
 d) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ e) $\frac{\sqrt{6}}{8}$

2. Del gráfico mostrado, calcular:

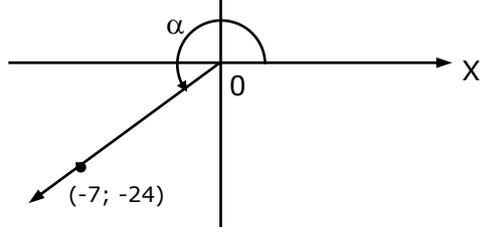
$$E = \text{Sec}\phi + \text{Tg}\phi$$



- a) $3/2$ b) $-3/2$ c) $2/3$
 d) $-2/3$ e) 1

3. Del gráfico mostrado, calcular:

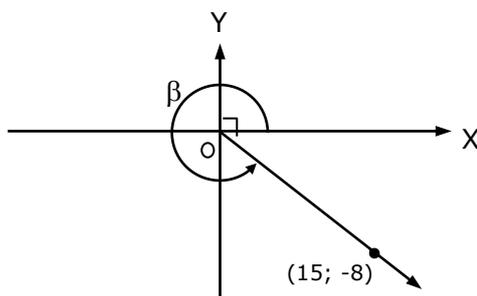
$$E = \frac{\text{Csc}\alpha}{\text{Sec}\alpha}$$



- a) $24/7$ b) $-7/24$ c) $25/7$
 d) $-24/7$ e) $7/24$

4. Del gráfico mostrado, calcular:

$$E = \text{Ctg}\beta - \text{Csc}\beta$$



- a) 2 b) 4 c) $1/2$
 d) $1/4$ e) $1/5$

5. Si (3; 4) es un punto del lado final de un ángulo en posición normal phi. Hallar el valor de:

$$E = \frac{\text{Sen}\phi}{1 - \text{Cos}\phi}$$

- a) 1 b) 2 c) $1/2$
 d) 3 e) $1/3$

6. Si el lado de un ángulo en posición estándar theta pasa por el punto (-1; 2). Hallar el valor de:

$$E = \text{Sec}\theta * \text{Csc}\theta$$

- a) $-5/2$ b) $5/2$ c) $-2/5$
 d) $2/5$ e) 1

7. Si el punto (-9; -40) pertenece al lado final de un ángulo en posición normal alpha. Hallar el valor de:

$$E = \text{Csc}\alpha + \text{Ctg}\alpha$$

- a) $4/5$ b) $-5/4$ c) $-4/5$
 d) $5/4$ e) $-4/3$

8. Dado el punto $(20; -21)$ correspondiente al lado final de un ángulo en posición normal β . Hallar el valor de:

$$E = \operatorname{Tg}\beta + \operatorname{Sec}\beta$$

- a) $2/5$ b) $-2/5$ c) 1
 d) $5/2$ e) $-5/2$

9. Si $\operatorname{Csc}\theta < 0 \wedge \operatorname{Sec}\theta > 0$. ¿En qué cuadrante está θ ?

- a) I b) II c) III
 d) IV e) Es cuadrantal

10. Si $\theta \in \text{II}$. Hallar el signo de:

$$E = \frac{\operatorname{Sen}\theta - 5\operatorname{Cos}\theta}{\operatorname{Tg}\theta + \sqrt{3}\operatorname{Ctg}\theta}$$

- a) + b) - c) + ó -
 d) + y - e) No tiene signo

11. Hallar el signo de:

$$E = \operatorname{Ctg}432^\circ \cdot \operatorname{Tg}^2 134^\circ \cdot \operatorname{Csc}^3 214^\circ \cdot \operatorname{Sec}^4 360^\circ$$

- a) + b) - c) + y -
 d) + y - e) No tiene signo

12. Si $\operatorname{Sen}\theta \cdot \operatorname{Cos}\theta > 0$. ¿En qué cuadrante está θ ?

- a) I b) II c) III
 d) I y III e) II y III

13. Si $\operatorname{Sen}\theta = \frac{1}{3} \wedge \theta \in \text{II}$. Hallar $\operatorname{Tg}\theta$.

- a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $-2\sqrt{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

- d) $2\sqrt{2}$ e) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

14. Si $\operatorname{Ctg}\phi = 0,25 \wedge \phi \in \text{III}$. Hallar $\operatorname{Sec}\phi$.

- a) $-\sqrt{17}$ b) $\sqrt{17}$ c) $\frac{\sqrt{17}}{4}$
 d) $-\sqrt{14}$ e) $-\frac{\sqrt{17}}{4}$

15. Si $\operatorname{Ctg}^2\phi = 3 \wedge 270^\circ < \theta < 360^\circ$. Hallar $\operatorname{Sen}\theta$

- a) $1/2$ b) $-1/2$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
 d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

16. Si $\operatorname{Csc}^2\theta = 16 \wedge \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Hallar el valor de: $E = \sqrt{15}\operatorname{Tg}\theta - \operatorname{Sen}\theta$

- a) $-3/4$ b) $3/4$ c) $-5/4$
 d) $5/4$ e) 0

17. Calcular el valor de:

$$E = (\operatorname{Cos}270^\circ)^{\operatorname{Sen}90^\circ} - \frac{\operatorname{Tg}360^\circ}{\operatorname{Cos}0^\circ} + (\operatorname{Sec}180^\circ)^{\operatorname{Ctg}270^\circ}$$

- a) 0 b) 1 c) -1
 d) 2 e) -3

18. Calcular el valor de:

$$E = \operatorname{Tg}\left[\operatorname{Sen}\left(\operatorname{Cos}\frac{\pi}{2}\right)\right] - \operatorname{Cos}[\operatorname{Tg}(\operatorname{Sen}\pi)]$$

- a) 0 b) 1 c) -1
 d) 2 e) -3

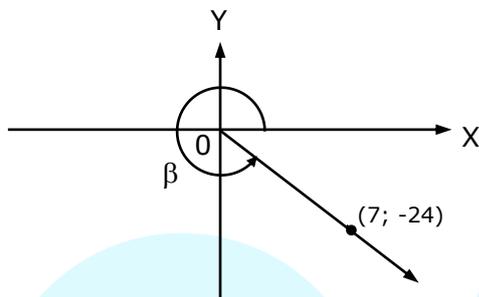
19. Si (5; 12) es un punto del lado final de un ángulo en posición normal ϕ . Hallar el valor de

$$E = \frac{1 - \text{Sen}\phi}{\text{Cos}\phi}$$

- a) 5 b) -5 c) 1/5
d) -1/5 e) 10

20. Del gráfico calcular:

$$P = \text{ctg}\beta + \text{Csc}\beta$$



- a) 3/4 b) -3/4 c) 1
d) 4/3 e) -4/3

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

8. FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Se denomina Función Trigonométrica al conjunto de pares ordenadas (x, y) , tal que la primera componente "x" es la medida de un ángulo cualquiera en radianes y la segunda componente "y" es la razón trigonométrica de "x".
Es decir:

$$F.T. = \{(x; y) / y = R.T.(x)\}$$

9. DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Si tenemos una función trigonométrica cualquiera.

$$y = R.T.(x)$$

- Se llama Dominio (DOM) de la función trigonométrica al conjunto de valores que toma la variable "x".

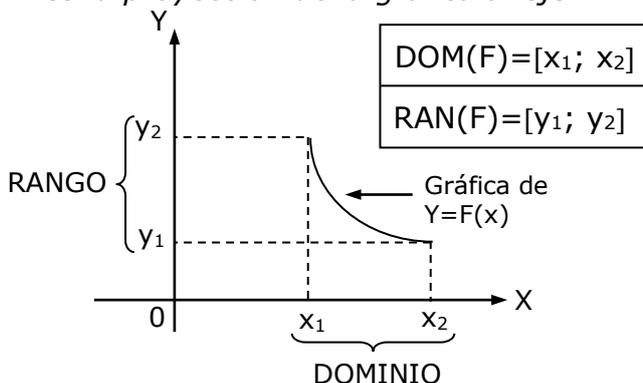
$$DOM = \{x / y = R.T.(x)\}$$

- Se llama Rango (RAN) de la función trigonométrica al conjunto de valores que toma la variables "y".

$$RAN = \{y / y = R.T.(x)\}$$

Recordar Álgebra

La gráfica corresponde a una función $y=F(x)$ donde su Dominio es la proyección de la gráfica al eje X y el Rango es la proyección de la gráfica al eje Y.



10. FUNCIÓN SENO

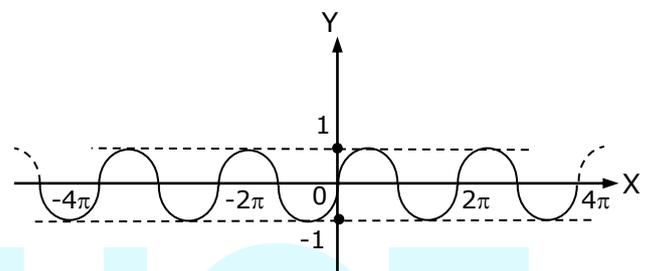
a. Definición

$$Sen = \{(x; y) / y = Senx\}$$

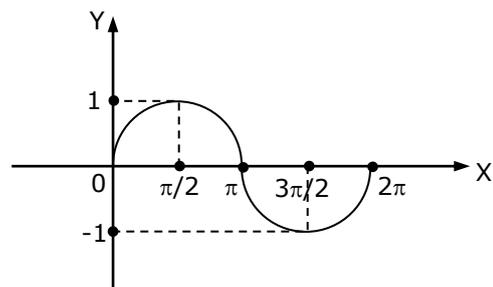
DOM (SEN): "x" $\in <-\infty; \infty>$ o IR

RAN (SEN): "Y" $\in [-1; 1]$

Gráfico de la Función SENO



- Una parte de la gráfica de la función seno se repite por tramos de longitud 2π . Esto quiere decir que la gráfica de la función seno es periódica de período 2π . Por lo tanto todo análisis y cálculo del dominio y rango se hace en el siguiente gráfico:



X	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
Y=Senx	0	1	0	-1	0

Nota

El período de una función se representa por la letra "T". Entonces el período de la función seno se denota así:

$$T(\text{Sen}x=2\pi)$$

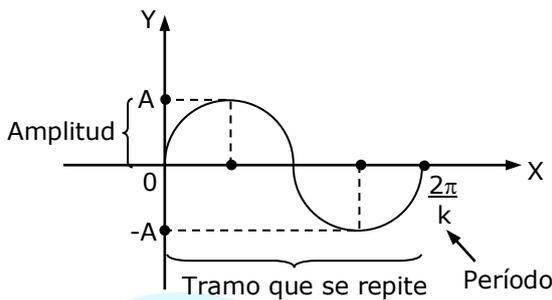
b. Propiedad

Si tenemos la función trigonométrica $y = \pm A \text{Sen} kx$, entonces al número "A" se le va a llamar Amplitud y el período de esta función es $2\pi/k$.

Es decir:

$$y = \pm A \text{Sen} kx \rightarrow \begin{cases} \text{Amplitud} = A \\ T(\text{Sen} kx) = \frac{2\pi}{k} \end{cases}$$

Gráfico:



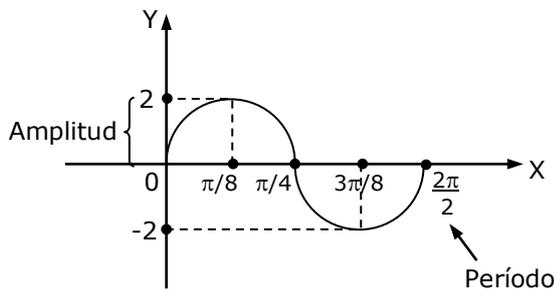
Ejemplo:

- Graficar la función $y = 2 \text{Sen} 4x$. Indicar la amplitud y el período.

Resolución:

$$y = 2 \text{Sen} 4x \rightarrow \begin{cases} \text{Amplitud} = 2 \\ T(\text{Sen} 4x) = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Graficando la función:



11. FUNCIÓN COSENO

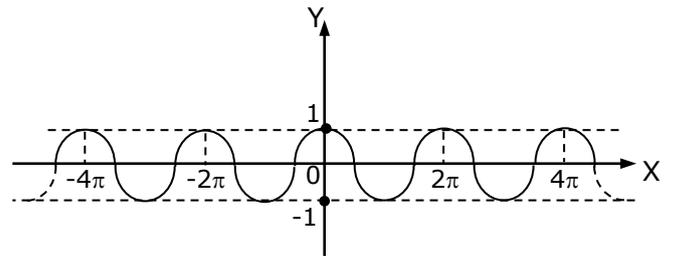
a. Definición

$$\text{Cos} = \{(x; y) / y = \text{Cos} x\}$$

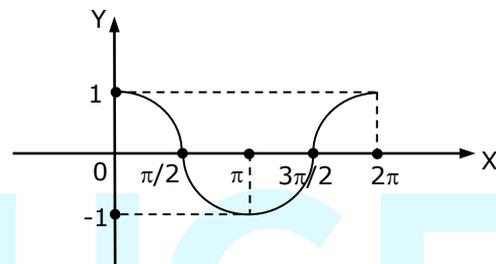
DOM (COS): "x" $\in <-\infty; \infty>$ o IR

RAN (COS): "Y" $\in [-1; 1]$

Gráfico de la Función COSENO



- Una parte de la gráfica de la función coseno se repite por tramos de longitud 2π . Esto quiere decir que la gráfica de la función coseno es periodo 2π . Por la tanto todo análisis y cálculo del dominio y rango se hace en el siguiente gráfico:



X	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
Y=Cosx	1	0	-1	0	1

Nota

El período de una función Coseno se denota así:

$$T(\text{Cos} x) = 2\pi$$

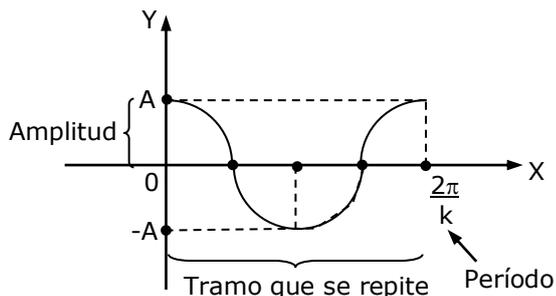
b. Propiedad

Si tenemos la función trigonométrica $y = \pm A \text{Cos} kx$, entonces al número "A" se le va a llamar Amplitud y el período de esta función es $2\pi/k$.

Es decir:

$$y = \pm A \text{Cos} kx \rightarrow \begin{cases} \text{Amplitud} = A \\ T(\text{Cos} kx) = \frac{2\pi}{k} \end{cases}$$

Gráfico:



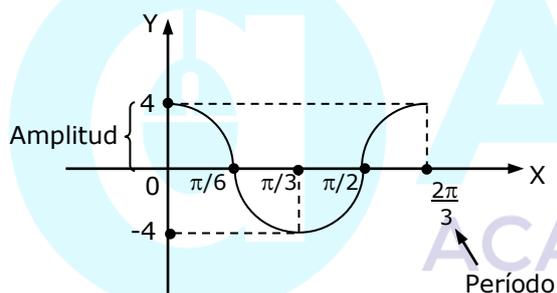
Ejemplo:

- Graficar la función $y=4\text{Sen}3x$. Indicar la amplitud y el período.

Resolución:

$$y = 4\text{Cos}3x \rightarrow \begin{cases} \text{Amplitud} = 4 \\ T(\text{Cos}3x) = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Graficando la función:

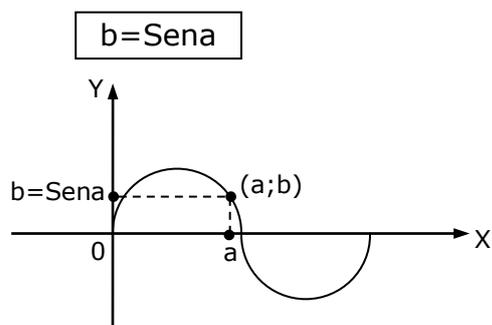


12. PROPIEDAD FUNDAMENTAL

a. Para la Función SENO

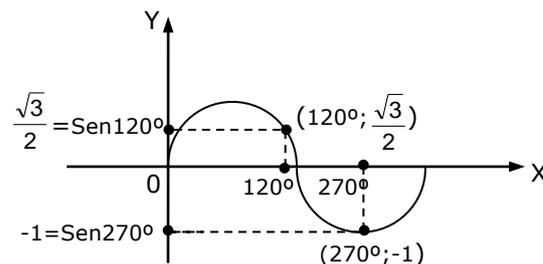
Si $(a; b)$ es un punto que pertenece a la gráfica de la función $y=\text{Sen}x$.

Entonces se cumple que:

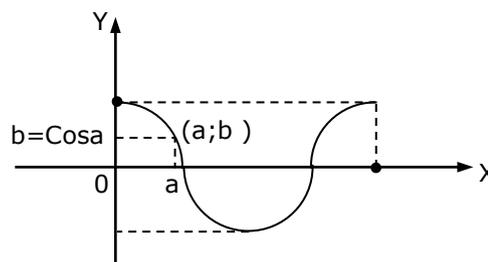


Ejemplo:

Graficamos la función: $y=\text{Sen}x$

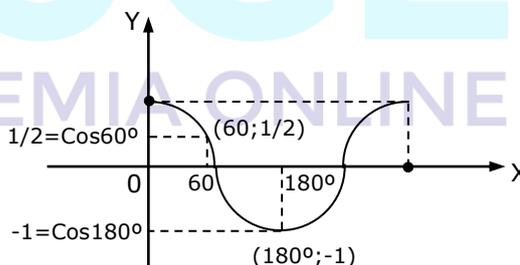


b. Para la Función COSENO



Ejemplo:

Graficamos la función: $y=\text{Cos}x$



EJERCICIOS

- Si el dominio de la función $y=\text{Sen}x$ es $[0; \pi/3]$ hallar su rango.
 - $[0; 1]$
 - $[0; 1/2]$
 - $[0; \frac{\sqrt{3}}{2}]$
 - $[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}]$
 - $[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1]$
- Si el rango de la función $y = \text{Sen} x$ es $[1/2; 1]$

- a) $[0; \pi/6]$ b) $[0; 6/\pi]$ c) $[\pi/6; \pi/2]$
 d) $[\pi/6; 5\pi/6]$ e) $[\pi/2; 5\pi/6]$

3. Si el dominio de la función $y = \text{Cos}x$ es $[\pi/6; \pi/4]$. hallar el rango, sugerencia: graficar.

- a) $[0; \frac{\sqrt{2}}{2}]$ b) $[0; \frac{\sqrt{3}}{2}]$ c) $[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}]$
 d) $[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1]$ e) $[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1]$

4. Si el rango de la función $y = \text{Cos}x$ es $[-1/2; 1/2]$. Hallar su dominio, sugerencia: graficar.

- a) $[0; \pi/3]$ b) $[\pi/3; \pi/2]$
 c) $[\pi/3; 2\pi/3]$ d) $[\pi/2; 2\pi/3]$
 e) $[\pi/3; \pi]$

5. Hallar el período (T) de las siguientes funciones, sin graficar.

- I. $y = \text{Sen}4x$ IV. $y = \text{Cos}6x$
 II. $y = \text{Sen}\frac{x}{3}$ V. $y = \text{Cos}\frac{x}{5}$
 III. $y = \text{Sen}\frac{3x}{4}$ VI. $y = \text{Cos}\frac{2x}{3}$

6. Graficar las siguientes funciones, indicando su amplitud y su período.

- I. $y = 2\text{Sen}4x$
 II. $y = \frac{1}{4}\text{Sen}\frac{x}{2}$
 III. $y = 4\text{Cos}3x$
 IV. $y = \frac{1}{6}\text{Cos}\frac{x}{4}$

7. Graficar las siguientes funciones:

- I. $y = -\text{Sen}x$
 II. $y = -4\text{Sen}2x$
 III. $y = -\text{Cos}x$
 IV. $y = -2\text{Cos}4x$

8. Graficar las siguientes funciones:

- I. $y = \text{Sen}x + 1$
 II. $y = \text{Sen}x - 1$
 III. $y = \text{Cos}x + 2$
 IV. $y = \text{Cos}x - 2$

9. Graficar las siguientes funciones:

- I. $y = 3 - 2\text{Sen}x$
 II. $y = 2 - 3\text{Cos}x$

10. Graficar las siguientes funciones:

- I. $y = \text{Sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
 II. $y = \text{Sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
 III. $y = \text{Cos}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
 IV. $y = \text{Cos}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

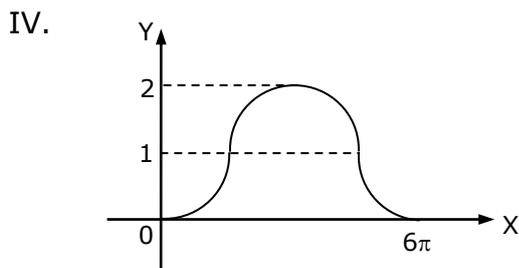
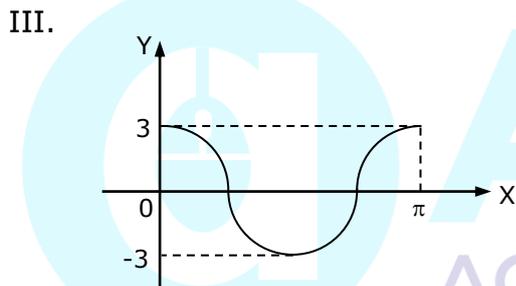
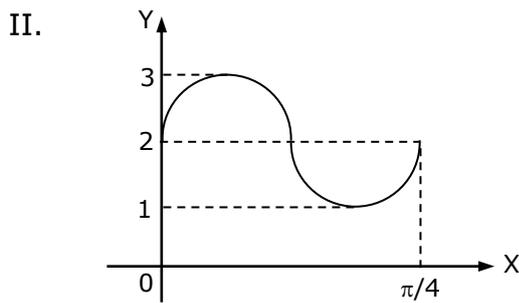
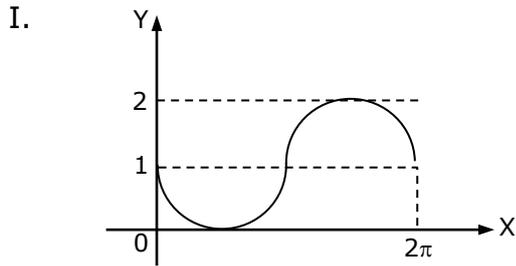
11. Calcular el ángulo de corrimiento (θ) y el período (T) de las siguientes funciones:

- I. $y = \text{Sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$
 II. $y = \text{Sen}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$
 III. $y = \text{Cos}\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$
 IV. $y = \text{Cos}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

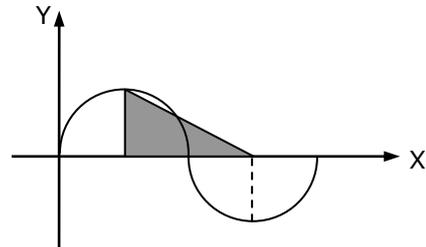
12. Graficar las siguientes funciones:

- I. $y = 2 + 3\text{Sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
 II. $y = 1 - 2\text{Cos}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$

13. Hallar la ecuación de cada gráfica:



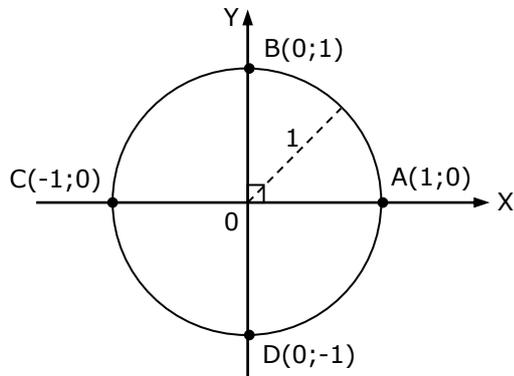
14. La ecuación de la gráfica es: $y=2\text{Sen}4x$. Hallar el área del triángulo sombreado.



- a) $\frac{\pi}{4} u^2$ b) $\frac{\pi}{8} u^2$ c) $\frac{\pi}{2} u^2$
 d) πu^2 e) $2\pi u^2$

CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

Una circunferencia se llama Trigonométrica si su centro es el origen de coordenadas y radio uno.

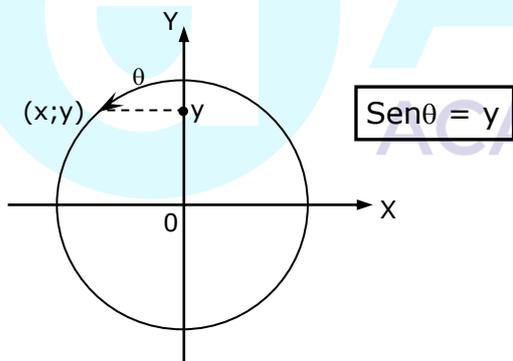


En Geometría Analítica la circunferencia trigonométrica se representa mediante la ecuación:

$$x^2 + y^2 = 1$$

1. SENO DE UN ARCO θ

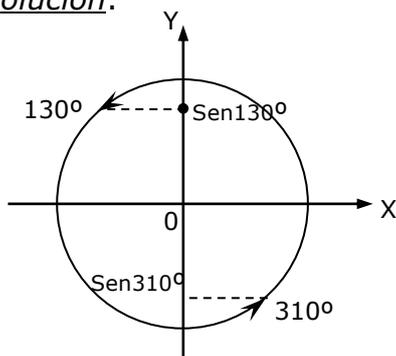
El seno de un arco θ es la **Ordenada** de su extremo.



Ejemplo:

- Ubicar el seno de los sgtes. arcos: 130° y 310°

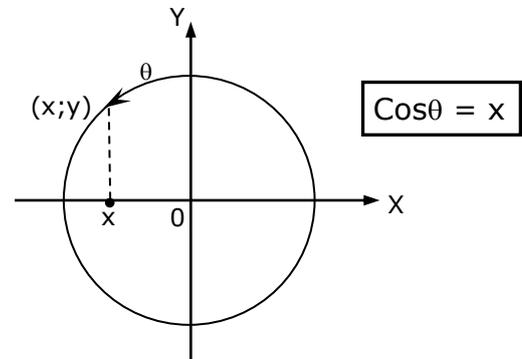
Resolución:



Observación: $\text{Sen}130^\circ > \text{Sen}310^\circ$

2. COSENO DE UN ARCO θ

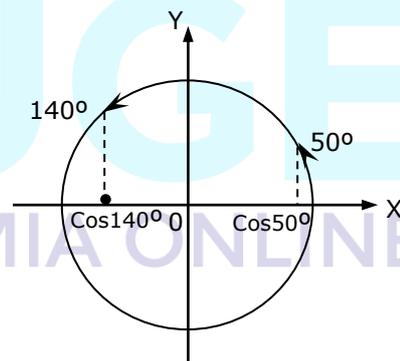
El seno de un arco θ es la **Abscisa** de su extremo.



Ejemplo:

- Ubicar el Coseno de los siguientes. arcos: 50° y 140°

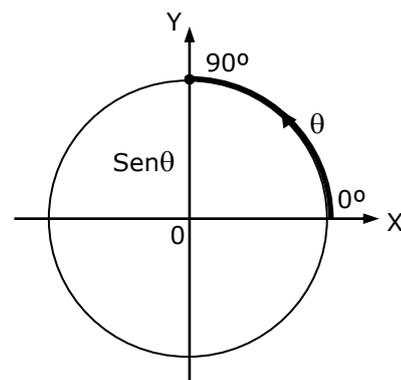
Resolución:



Observación: $\text{Cos}50^\circ > \text{Cos}140^\circ$

3. VARIACIONES DEL SENO DE ARCO θ

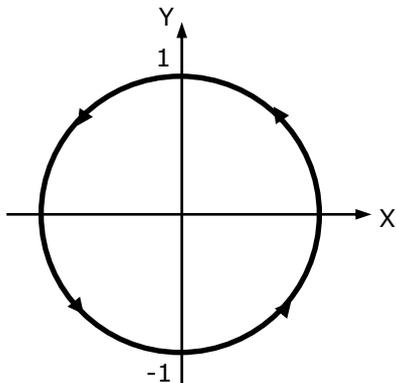
A continuación analizaremos la variación del seno cuando θ esta en el primer cuadrante.



Si $0^\circ < \theta < 90^\circ \rightarrow 0 < \text{Sen}\theta < 1$

En general:

- Si θ recorre de 0° a 360° entonces el seno de θ se extiende de -1 a 1 .
Es decir:

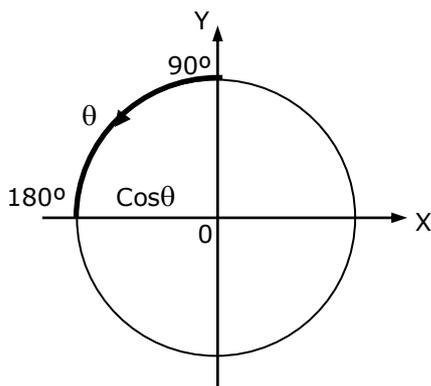


Si $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ \rightarrow -1 \leq \text{Sen}\theta \leq 1$

Máx(Sen θ) = 1
Mín(Sen θ) = -1

4. **VARIACIONES DEL COSENO DE ARCO θ**

A continuación analizaremos la variación del coseno cuando θ está en el segundo cuadrante.



Si $0^\circ < \theta < 180^\circ \rightarrow -1 < \text{Cos}\theta < 0$

En general:

- Si θ recorre de 0° a 360° entonces el coseno de θ se extiende de -1 a 1 .

Es decir:

Si $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ \rightarrow -1 \leq \text{Cos}\theta \leq 1$

Max(Cos θ) = 1
Min(Cos θ) = -1

EJERCICIOS

- Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

- I. Sen $20^\circ > \text{Sen}80^\circ$
- II. Sen $190^\circ < \text{Sen}250^\circ$

- a) VF b) VV c) FF
- d) FV e) Faltan datos

- Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

- I. Sen $100^\circ > \text{Sen}140^\circ$
- II. Sen $350^\circ < \text{Sen}290^\circ$

- a) VV b) VF c) FV
- d) FF e) Falta datos

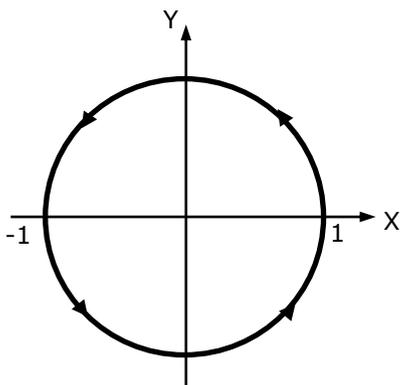
- Hallar el máximo valor de "k" para que la siguiente igualdad exista.

$$\text{Sen}\theta = \frac{3k - 1}{5}$$

- a) $-1/3$ b) -1 c) 0
- d) 1 e) 2

- Si $\theta \in \text{II}$. Hallar la extensión de "k" para que la siguiente igualdad exista.

$$\text{Sen}\theta = \frac{2k - 9}{5}$$



5. Si $\theta \in IV$. Hallar la extensión de "k" para que la siguiente igualdad exista.

$$k = \frac{3\text{Sen}\theta - 2}{4}$$

- a) $\langle 1/2; 5/4 \rangle$ b) $\langle -1/2; 5/4 \rangle$
 c) $\langle -5/4; 0 \rangle$ d) $\langle -1/2; 0 \rangle$
 e) $\langle -5/4; -1/2 \rangle$

6. Indicar verdadero (V) o (F) según corresponda:

- I. $\text{Sen}\theta = \sqrt{2} - 1$
 II. $\text{Sen}\theta = \sqrt{2} - \sqrt{3}$
 III. $\text{Sen}\theta = \sqrt{3}$

- a) VVV b) VVF c) FFF
 d) FVF e) VFV

7. Hallar el máximo y mínimo de "E" si:

$$E = 3 - 2\text{Sen}\theta$$

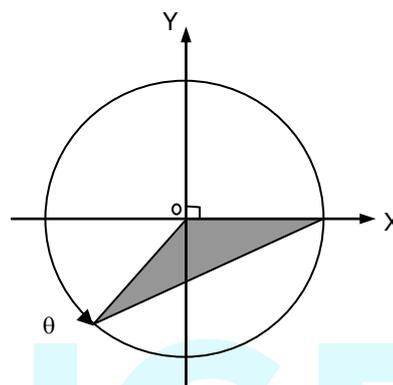
- a) Max=-1 ; Min=-5
 b) Max=5 ; Min=1
 c) Max=1 ; Min=-5
 d) Max=5 ; Min=-1
 e) Max=3 ; Min=-2

8. Si $\theta \in III$. Hallar la extensión de "E" y su máximo valor:

$$E = \frac{4\text{Sen}\theta - 3}{7}$$

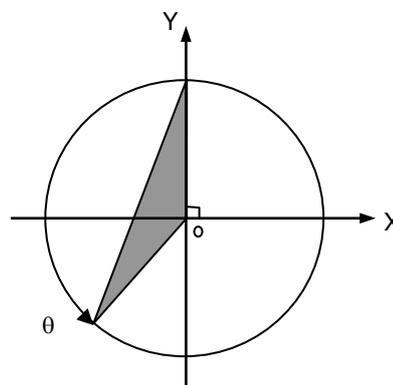
- a) $4/7 < E < 1$ Max=1
 b) $-1 < E < 3/7$ Max=3/7
 c) $-1 < E < -3/7$ Max=-3/7
 d) $-1 < E < -3/7$ No tiene Max
 e) $-1 < E < 1$ Max=1

9. Calcular el área del triángulo sombreado, si la circunferencia es trigonométrica.



- a) $\text{Sen}\theta$ b) $-\text{Sen}\theta$ c) $\frac{1}{2} \text{Sen}\theta$
 d) $-\frac{1}{2} \text{Sen}\theta$ e) $2\text{Sen}\theta$

10. Calcular el área del triángulo sombreado, si la circunferencia es trigonométrica:



- a) $\text{Cos}\theta$ b) $-\text{Cos}\theta$ c) $\frac{1}{2} \text{Cos}\theta$
 d) $-\frac{1}{2} \text{Cos}\theta$ e) $-2\text{Cos}\theta$

11. Indicar verdadero (V) o Falso (F) según corresponda:

- I. $\cos 10^\circ < \cos 50^\circ$
 II. $\cos 20^\circ > \cos 250^\circ$

- a) VV b) FF c) VF
 d) FV e) Faltan datos

12. Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

- I. $\cos 100^\circ < \cos 170^\circ$
 II. $\cos 290^\circ > \cos 340^\circ$

- a) FV b) VF c) VV
 d) FF e) Faltan datos

13. Hallar el mínimo valor de "k" para que la siguiente igualdad exista.

$$\cos \theta = \frac{5k - 3}{2}$$

- a) $-1/5$ b) $1/5$ c) 1
 d) -1 e) -5

14. Indicar verdadero (V) o Falso (F) según corresponda.

I. $\cos \theta = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

II. $\cos \theta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

III. $\cos \theta = \frac{\pi}{2}$

- a) FVF b) FFF c) FVV
 d) VVV e) VFV

15. Hallar el máximo y mínimo valor de "E", si:

$$E = 5 - 3\cos \theta$$

- a) Max = 5 ; Min = -3
 b) Max = 8 ; Min = 2
 c) Max = 5 ; Min = 3
 d) Max = -3 ; Min = -5
 e) Max = 8 ; Min = -2

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

1. IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA

Una identidad trigonométrica es una igualdad que contiene expresiones trigonométricas que se cumplen para todo valor admisible de la variable.

Ejemplos

Identidad Algebraica: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Identidad Trigonométrica: $\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$

Ecuación Trigonométrica: $\text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta = 1$

Para: $\theta = 90^\circ$ Cumple

Para: $\theta = 30^\circ$ No cumple

2. IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Las identidades trigonométricas fundamentales sirven de base para la demostración de otras identidades más complejas.

Se clasifican:

- Pitagóricas
- Por cociente
- Recíprocas

2.1 IDENTIDADES PITAGÓRICAS

I.	$\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$
II.	$1 + \text{Tan}^2\theta = \text{Sec}^2\theta$
III.	$1 + \text{Cot}^2\theta = \text{Csc}^2\theta$

Demostración I

Sabemos que $x^2 + y^2 = r^2$

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = 1 \quad \text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1 \quad \text{l.q.q.d.}$$

2.2 IDENTIDADES POR COCIENTE

I.	$\text{Tan}\theta = \frac{\text{Sen}\theta}{\text{Cos}\theta}$
II.	$\text{Cot}\theta = \frac{\text{Cos}\theta}{\text{Sen}\theta}$

Demostración I

$$\text{Tan}\theta = \frac{\text{ORDENADA}}{\text{ABSCISA}} = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\text{Sen}\theta}{\text{Cos}\theta} \quad \text{l.q.q.d.}$$

2.3 IDENTIDADES RECÍPROCAS

I.	$\text{Sen}\theta \cdot \text{Csc}\theta = 1$
II.	$\text{Cos}\theta \cdot \text{Sec}\theta = 1$
III.	$\text{Tan}\theta \cdot \text{Cot}\theta = 1$

Demostración I

$$\frac{y}{r} \cdot \frac{r}{y} = 1 \quad \text{Sen}\theta \cdot \text{Csc}\theta = 1 \quad \text{L.q.q.d.}$$

Observaciones: Sabiendo que: $\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$

Despejando: $\text{Sen}^2\theta = 1 - \text{Cos}^2\theta \Rightarrow \text{Sen}^2\theta = (1 + \text{Cos}\theta)(1 - \text{Cos}\theta)$

Así mismo: $\text{Cos}^2\theta = 1 - \text{Sen}^2\theta \Rightarrow \text{Cos}^2\theta = (1 + \text{Sen}\theta)(1 - \text{Sen}\theta)$

3. IDENTIDADES AUXILIARES

- A) $\text{Sen}^4\theta + \text{Cos}^4\theta = 1 - 2\text{Sen}^2\theta \cdot \text{Cos}^2\theta$
 B) $\text{Sen}^6\theta + \text{Cos}^6\theta = 1 - 3\text{Sen}^2\theta \cdot \text{Cos}^2\theta$
 C) $\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = \text{Sec}\theta \cdot \text{Csc}\theta$
 D) $\text{Sec}^2\theta + \text{Csc}^2\theta = \text{Sec}^2\theta \cdot \text{Csc}^2\theta$
 E) $(1 + \text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta)^2 = 2(1 + \text{Sen}\theta)(1 + \text{Cos}\theta)$

Demostraciones

A) $\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$

Elevando al cuadrado:

$$(\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta)^2 = 1^2$$

$$\text{Sen}^4\theta + \text{Cos}^4\theta + 2\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1 \quad \boxed{\text{Sen}^4\theta + \text{Cos}^4\theta = 1 - 2\text{Sen}^2\theta \cdot \text{Cos}^2\theta}$$

B) $\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$

Elevando al cubo:

$$(\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta)^3 = 1^3$$

$$\text{Sen}^6\theta + \text{Cos}^6\theta + 3(\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta) \underbrace{(\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta)}_1 = 1$$

1

$$\text{Sen}^6\theta + \text{Cos}^6\theta + 3(\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta) = 1 \Rightarrow \boxed{\text{Sen}^6\theta + \text{Cos}^6\theta = 1 - 3(\text{Sen}^2\theta \cdot \text{Cos}^2\theta)}$$

C) $\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = \frac{\text{Sen}\theta}{\text{Cos}\theta} + \frac{\text{Cos}\theta}{\text{Sen}\theta}$

1

$$\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = \frac{\overbrace{\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta}}{1} \cdot \frac{1}{\text{Cos}\theta \cdot \text{Sen}\theta}$$

$$\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = \frac{1 \cdot 1}{\text{Cos}\theta \cdot \text{Sen}\theta} \Rightarrow \boxed{\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = \text{Sec}\theta \cdot \text{Csc}\theta}$$

$$D) \sec^2\theta + \csc^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\sec^2\theta + \csc^2\theta = \frac{\overbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}^1}{\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta}$$

$$\sec^2\theta + \csc^2\theta = \frac{1 \cdot 1}{\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta} \Rightarrow \boxed{\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta \cdot \csc^2\theta}$$

$$\begin{aligned} E) (1 + \sin\theta + \cos\theta)^2 &= 1^2 + (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 + 2\sin\theta + 2\cos\theta + 2\sin\theta \cdot \cos\theta \\ &= 1 + \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta \cdot 2\cos\theta + 2\sin\theta \cdot \cos\theta \\ &= 2 + 2\sin\theta + 2\cos\theta + 2\sin\theta \cdot \cos\theta \end{aligned}$$

Agrupando convenientemente:

$$\begin{aligned} &= 2(1 + \sin\theta) + 2\cos\theta(1 + \sin\theta) \\ &= (1 + \sin\theta)(2 + 2\cos\theta) \\ &= 2(1 + \sin\theta)(1 + \cos\theta) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{(1 + \sin\theta + \cos\theta)^2 = 2(1 + \sin\theta)(1 + \cos\theta)}$$

4. PROBLEMAS PARA DEMOSTRAR

Demostrar una identidad consiste en que ambos miembros de la igualdad propuesta son equivalentes, para lograr dicho objetivo se siguen los siguientes pasos:

1. Se escoge el miembro "más complicado"
2. Se lleva a Senos y Cosenos (por lo general)
3. Se utilizan las identidades fundamentales y las diferentes operaciones algebraicas.

Ejemplos:

1) Demostrar:

$$\sec x (1 - \sin^2 x) \csc x = \cot x$$

Se escoge el 1º miembro:

$$\sec x (1 - \sin^2 x) \csc x =$$

Se lleva a senos y cosenos:

$$\frac{1}{\cos x} \cdot (\cos^2 x) \cdot \frac{1}{\sin x} =$$

$$\text{Se efectúa: } \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} =$$

$$\boxed{\cot x = \cot x}$$

2) Demostrar:

$$[\sec x + \tan x - 1][1 + \sec x - \tan x] = 2\tan x$$

Se escoge el 1º Miembro:

$$\begin{aligned} [\operatorname{Sec} x + \operatorname{Tan} x - 1] [\operatorname{Sec} x - \operatorname{Tan} x + 1] &= \\ [\operatorname{Sec} x + (\operatorname{Tan} x - 1)] [\operatorname{Sec} x - (\operatorname{Tan} x - 1)] &= \end{aligned}$$

Se efectúa

$$\begin{aligned} (\operatorname{Sec} x)^2 - (\operatorname{Tan} x - 1)^2 &= \\ (1 + \operatorname{Tan}^2 x) - (\operatorname{Tan}^2 x - 2\operatorname{Tan} x + 1) &= \\ 1 + \operatorname{Tan}^2 x - \operatorname{Tan}^2 x + 2\operatorname{Tan} x - 1 &= \end{aligned}$$

$$\boxed{2\operatorname{Tan} x = 2\operatorname{Tan} x}$$

5. PROBLEMAS PARA REDUCIR Y SIMPLIFICAR

Ejemplos:

- 1) Reducir: $K = \operatorname{Sen}^4 x - \operatorname{Cos}^4 x + 2\operatorname{Cos}^2 x$
Por diferencia de cuadrados

$$\begin{aligned} &1 \\ K &= (\operatorname{Sen}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x) (\operatorname{Sen}^2 x - \operatorname{Cos}^2 x) + 2\operatorname{Cos}^2 x \\ K &= \operatorname{Sen}^2 x - \operatorname{Cos}^2 x + 2\operatorname{Cos}^2 x \\ K &= \operatorname{Sen}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x \Rightarrow \boxed{K = 1} \end{aligned}$$

- 2) Simplificar: $E = \frac{1 + \operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sen} x} - \frac{\operatorname{Sen} x}{1 - \operatorname{Cos} x}$

$$E = \frac{\overbrace{(1 + \operatorname{Cos} x)(1 - \operatorname{Cos} x)}^{1 - \operatorname{Cos}^2 x} - (\operatorname{Sen} x)(\operatorname{Sen} x)}{\operatorname{Sen} x(1 - \operatorname{Cos} x)}$$

$$E = \frac{\operatorname{Sen}^2 x - \operatorname{Sen}^2 x}{\operatorname{Sen} x(1 - \operatorname{Cos} x)} \rightarrow E = \frac{0}{\operatorname{Sen} x(1 - \operatorname{Cos} x)} \Rightarrow \boxed{E = 0}$$

6. PROBLEMAS CON CONDICIÓN

Dada una o varias condiciones se pide hallar una relación en términos de dicha o dichas condiciones.

Ejemplo

Si: $\operatorname{Sen} x + \operatorname{Cos} x = \frac{1}{2}$. Hallar: $\operatorname{Sen} x \cdot \operatorname{Cos} x$

Resolución

$$\text{Del dato: } (\operatorname{Sen} x + \operatorname{Cos} x)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\underbrace{\operatorname{Sen}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x}_1 + 2\operatorname{Sen} x \cdot \operatorname{Cos} x = \frac{1}{4}$$

$$2\text{Sen}x \cdot \text{Cos}x = \frac{1}{4} - 1$$

$$2\text{Sen}x \cdot \text{Cos}x = -\frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{\text{Sen}x \cdot \text{Cos}x = -\frac{3}{8}}$$

7. PROBLEMAS PARA ELIMINACIÓN DE ÁNGULOS

La idea central es eliminar todas las expresiones trigonométricas, y que al final queden expresiones independientes de la variable.

Ejemplo:

Eliminar "x", a partir de: $\text{Sen}x = a$
 $\text{Cos}x = b$

Resolución

$$\left. \begin{array}{l} \text{De Sen}x = a \rightarrow \text{Sen}^2x = a^2 \\ \text{Cos}x = b \rightarrow \text{Cos}^2x = b^2 \end{array} \right\} \text{Sumamos}$$

$$\underline{\text{Sen}^2x + \text{Cos}^2x = a^2 + b^2}$$

$$\boxed{1 = a^2 + b^2}$$

PROBLEMAS PARA LA CLASE

1. Reducir : $E = \text{Sen}^2x \cdot \text{Sec}x + \text{Cos}x$

- a) $\text{Sec}x$ b) $\text{Csc}x$ c) Tgx d) $\text{Ctg}x$ e) 1

2. Simplificar : $E = \frac{\text{Sec}x - \text{Tgx} - 1}{\text{Csc}x - \text{Ctg}x - 1}$

- a) $\text{tg}x$ b) $\text{csc}x$ c) $\text{sec}x$ d) $\text{ctg}x$ e) $\text{Sec}x \cdot \text{Csc}x$

3. Reducir :

$$E = \frac{1}{1 - \text{Cos}^2\theta} + \frac{1}{\text{Csc}^2\theta - 1} - \frac{1}{1 - \text{Sen}^2\theta}$$

- a) $\text{Tg}^2\theta$ b) $\text{Sec}^2\theta$ c) $\text{Csc}^2\theta$ d) $\text{Ctg}^2\theta$ e) $\text{Sen}^2\theta$

4. Reducir: $G = \left(\frac{\text{Sen}x + \text{Tgx}}{1 + \text{Cos}x} \right) \left(\frac{\text{Cos}x + \text{Ctg}x}{1 + \text{Sen}x} \right)$

- a) 1 b) Tgx c) $\text{Ctg}x$ d) $\text{Sec}x \cdot \text{Csc}x$ e) $\text{Sen}x \cdot \text{Cos}x$

5. Calcular el valor de "K" si : $\frac{1}{1+K} + \frac{1}{1-K} = 2\text{Sec}^2\theta$

- a) $\text{Cos}\theta$ b) $\text{Sen}\theta$ c) $\text{Csc}\theta$ d) $\text{Sec}\theta$ e) $\text{Tg}\theta$

6. Reducir : $W = (\text{Sen}x + \text{Cos}x + 1)(\text{Sen}x + \text{Cos}x - 1)$

- a) 2 b) $\text{Sen}x$ c) $\text{Cos}x$ d) $2\text{Sen}x$ e) $2\text{Sen}x.\text{Cos}x$

7. Reducir : $G = \sqrt[3]{\frac{\text{Csc}x - \text{Sen}x}{\text{Sec}x - \text{Cos}x}}$

- a) $\text{Ctg}x$ b) Tgx c) 1 d) $\text{Sec}x$ e) $\text{Csc}x$

8. Reducir :

$$K = \text{Ctg}x.\text{Cos}x - \text{Csc}x(1 - 2\text{Sen}^2x)$$

- a) $\text{Sen}x$ b) $\text{Cos}x$ c) Tgx d) $\text{Ctg}x$ e) $\text{Sec}x$

9. Si : $\text{Csc}\theta - \text{Ctg}\theta = \frac{1}{5}$

Calcular : $E = \text{Sec}\theta + \text{Tg}\theta$

- a) 5 b) 4 c) 2 d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{2}$

10. Reducir : $H = \text{Tg}^2x[\text{Tg}^4x + 3\text{Tg}^2x + 3] + 1$

- a) Sec^6x b) Cos^6x c) Tg^6x d) Ctg^6x e) 1

11. Reducir : $G = \frac{\text{Sen}x}{1 + \text{Cos}x} + \frac{\text{Tgx} + \text{Cos}x - 1}{\text{Sen}x}$

- a) 1 b) $\text{Cos}x$ c) $\text{Sen}x$ d) $\text{Csc}x$ e) $\text{Sec}x$

12. Reducir : $J = \text{Cos}\theta.(\text{Sec}^3\theta - \text{Csc}\theta) - \text{Tg}^3\theta.(\text{Ctg}\theta - \text{Ctg}^4\theta)$

- a) 1 b) $2\text{Ctg}\theta$ c) $2\text{Cos}\theta$ d) $2\text{Sen}\theta$ e) $\text{Sec}^2\theta$

13. Reducir : $W = (\text{Sec}^2\theta + 1)(\text{Sec}^4\theta + 1) + \text{Ctg}^2\theta$

- a) $\text{Ctg}^2\theta$ b) $\text{Csc}^8\theta$ c) $\text{Sec}^8\theta$ d) $\text{Tg}^8\theta$ e) $\text{Sec}^8\theta.\text{Ctg}^2\theta$

14. Reducir : $M = \frac{(2Tgx + Ctgx)^2 + (Tgx - 2Ctgx)^2}{Tg^2x + Ctg^2x}$

- a) 2 b) 10 c) 5 d) 3 e) 7

15. Reducir : $E = 1 + \frac{1}{-1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{Sen^2x}{(1 - Senx)(1 + Senx)}}}}$

- a) Sen^2x b) Cos^2x c) Tg^2x d) Ctg^2x e) Sec^2x

16. Si : $\frac{Tg\theta + Ctg\theta + m}{Tg\theta + Ctg\theta + 2} = \frac{Sen^3\theta + Cos^3\theta}{[Sen\theta + Cos\theta]^3}$

Calcular el valor de " m "

- a) 0 b) 1 c) -1 d) 2 e) -2

17. Simplificar : $E = \frac{(Cos^3x \cdot Sec^2x + Tgx \cdot Senx)Cscx}{Ctgx \cdot Senx}$

- a) Csc^2x b) Sec^8x c) $Secx \cdot Cscx$ d) $Secx \cdot Ctgx$ e) $Sec^2x \cdot Cscx$

18. Si : $\theta \in \left\langle \frac{3\pi}{4}, \pi \right\rangle$ Reducir : $J = \sqrt{1 + \frac{2}{Tg\theta + Ctg\theta}} + \sqrt{1 - \frac{2}{Tg\theta + Ctg\theta}}$

- a) $2Sen\theta$ b) $-2Cos\theta$ c) $-Tg\theta$ d) $2Cos\theta$ e) $2(Sen\theta + Cos\theta)$

19. Si : $Sen^4\theta - Cos^4\theta = \frac{1}{3}$

Calcular : $E = Sec^2\theta \cdot (1 + Ctg^2\theta)$

- a) 2 b) 4 c) 7/2 d) 9/2 e) 5

20. Simplificar : $R = (Senx + Cosx)(Tgx + Ctgx) - Secx$

- a) $Senx$ b) $Cosx$ c) $Ctgx$ d) $Secx$ e) $Cscx$

21. Reducir : $H = (Secx - Cosx)(Cscx - Senx)(Tgx + Ctgx)$

- a) 1 b) 2 c) 3d) 0 e) 4

22. Si : $Tg\theta = 7 - Ctg\theta$

Calcular : $E = \sqrt{\text{Sec}^2\theta + \text{Ctg}^2\theta}$

- a)
- $\sqrt{43}$
- b)
- $3\sqrt{5}$
- c)
- $3\sqrt{7}$
- d)
- $4\sqrt{3}$
- e)
- $4\sqrt{5}$

23. Reducir : $E = \frac{\text{Sec}^2x + \text{Csc}^2x + \text{Sec}^2x \cdot \text{Csc}^2x}{2\text{Sec}^2x \cdot \text{Csc}^2x} + \text{Tg}^2x$

- a)
- Tgx
- b)
- 2Tg^2x
- c)
- $\text{Sen}x$
- d)
- Sec^2x
- e)
- Sen^2x

24. Reducir : $H = \frac{(1 - \text{Sen}x + \text{Cos}x)^2(1 + \text{Sen}x)}{\text{Sen}x \cdot \text{Cos}x(1 + \text{Cos}x)}$

- a)
- Tgx
- b)
- $\text{Ctg}x$
- c)
- $\text{Sen}x$
- d)
- $\text{Cos}x$
- e)
- $\text{Sen}x \cdot \text{Cos}x$



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ARCOS COMPUESTOS

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA DE DOS ARCOS

$\text{Sen } (\alpha+\beta) = \text{Sen}\alpha \cdot \text{Cos}\beta + \text{Sen}\beta \cdot \text{Cos}\alpha$
$\text{Cos } (\alpha+\beta) = \text{Cos}\alpha \cdot \text{Cos}\beta - \text{Sen}\alpha \cdot \text{Sen}\beta$
$\text{Tg } (\alpha+\beta) = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta}$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA RESTA DE DOS ARCOS

$\text{Sen } (\alpha-\beta) = \text{Sen}\alpha \cdot \text{Cos}\beta - \text{Cos}\alpha \cdot \text{Sen}\beta$
$\text{Cos } (\alpha-\beta) = \text{Cos}\alpha \cdot \text{Cos}\beta + \text{Sen}\alpha \cdot \text{Sen}\beta$
$\text{Tg } (\alpha-\beta) = \frac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta}{1 + \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta}$

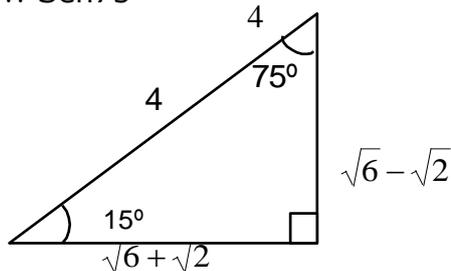
Ojo:

$$\text{Ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{Ctg}\alpha \cdot \text{Ctg}\beta \mp 1}{\text{Ctg}\beta \pm \text{Ctg}\alpha}$$

Aplicación:

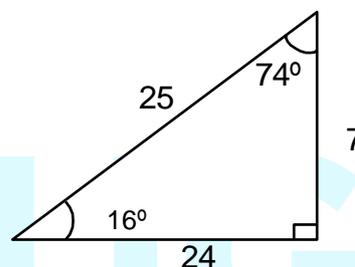
a) $\text{Sen } 75^\circ = \text{Sen } (45^\circ + 30^\circ)$
 $= \text{Sen } 45^\circ \text{Cos}30^\circ + \text{Cos}45^\circ \text{Sen}30^\circ$
 $= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\therefore \text{Sen}75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$



b) $\text{Cos } 16^\circ = \text{Cos } (53^\circ - 37^\circ)$
 $= \text{Cos } 53^\circ \cdot \text{Cos}37^\circ - \text{Sen}53^\circ \cdot \text{Sen}37^\circ$
 $= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$

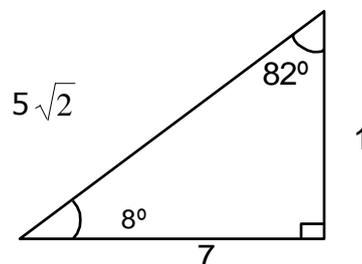
$$\therefore \text{Cos } 16^\circ = \frac{24}{25}$$



c) $\text{tg } 8^\circ = \text{tg } (53^\circ - 45^\circ)$

$$= \frac{\text{tg}53^\circ - \text{tg}45^\circ}{1 + \text{tg}53^\circ \cdot \text{tg}45^\circ} = \frac{\frac{4}{3} - 1}{1 + \frac{4}{3} \cdot 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{1}{7}$$

$$\therefore \text{Tg } 8^\circ = \frac{1}{7}$$



EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcular:

$$E = (\text{Sen}17^\circ + \text{Cos}13^\circ)^2 + (\text{Cos}17^\circ + \text{Sen}13^\circ)^2$$

$$= \text{Sen}^2 17^\circ + \text{Cos}^2 13^\circ + 2\text{Cos}13^\circ \text{Sen}17^\circ +$$

$$\text{Cos}^2 17^\circ + \text{Sen}^2 13^\circ + 2\text{Cos}17^\circ \text{Sen}13^\circ$$

$$= 1 + 1 + 2\text{Sen}(17^\circ + 13^\circ) = 2 + 2\text{Sen}30^\circ = 3$$

2. Hallar: $P = \text{Cos}80^\circ + 2\text{Sen}70^\circ \cdot \text{Sen}10^\circ$

Resolución

$$= \text{Cos}(70^\circ + 10^\circ) + 2\text{Sen}70^\circ \cdot \text{Sen}10^\circ$$

$$= \text{Cos}70^\circ \cdot \text{Cos}10^\circ - \text{Sen}70^\circ \cdot \text{Sen}10^\circ + 2\text{Sen}70^\circ \cdot \text{Sen}10^\circ$$

$$= \text{Cos}70^\circ \cdot \text{Cos}10^\circ + \text{Sen}70^\circ \text{Sen}10^\circ$$

$$= \text{Cos}(70^\circ - 10^\circ) = \text{Cos}60^\circ = \frac{1}{2}$$

3. Hallar Dominio y Rango:

$$f(x) = 3\text{Sen}x + 4 \text{Cos}x$$

Resolución

Dominio: $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Rango: } y = 5 \left(\frac{3}{5} \text{Sen}x + \frac{4}{5} \text{Cos}x \right)$$

$$Y = 5 (\text{Sen}37^\circ \cdot \text{Sen}x + \text{Cos}37^\circ \cdot \text{Cos}x)$$

$$Y = 5 \text{Cos}(x - 37^\circ)$$

$$Y_{\text{max}} = 5 ; Y_{\text{min}} = -5$$

Propiedad:

$$E = a \text{Sen}\alpha \pm b \text{Cos}x$$

$$E_{\text{máx}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$E_{\text{mín}} = -\sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejemplo:

$$-13 \leq 5 \text{Sen}x + 12 \text{Cos}x \leq 13$$

$$-\sqrt{2} \leq \text{Sen}x + \text{Cos}x \leq \sqrt{2}$$

4. Siendo $\text{Sen} 20^\circ = a$, $\text{Cos} 25^\circ = \sqrt{2} b$.
Obtener $\text{tg} 25^\circ$ en término de "a" y "b"

Resolución

$$\text{Sen} 20^\circ = a$$

$$\text{Sen} (45^\circ - 25^\circ) = a$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\text{cos}25^\circ}{\sqrt{2}b} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \text{Sen}25^\circ = a$$

$$b - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Sen} 25^\circ = a$$

$$\text{Sen} 25^\circ = \sqrt{2} (b - a)$$

$$\text{Tg}25^\circ = \frac{\text{Sen}25^\circ}{\text{Cos}25^\circ} = \frac{\sqrt{2}(a-b)}{\sqrt{2}b} = \frac{a-b}{b}$$

5. Simplificar:

$$E = \text{Sen}^2(\alpha + \beta) + \text{sen}^2\beta - 2\text{sen}(\alpha + \beta) \text{Sen}\beta \cdot \text{Cos}\alpha$$

Resolución:

Ordenando:

$$E = \text{Sen}^2(\alpha + \beta) - 2\text{Sen}(\alpha + \beta) \text{Sen}\beta \cdot \text{Cos}\alpha$$

$$+ \text{Sen}^2\beta + \text{Cos}^2\alpha \text{Sen}^2\beta - \text{Cos}^2\alpha \text{Sen}^2\beta$$

$$E = \{\text{sen}(\alpha + \beta) - \text{Cos}\alpha \cdot \text{Sen}\beta\}^2 + \text{Sen}^2\beta(1 - \text{Cos}^2\alpha)$$

$$E = \text{Sen}^2\alpha \text{Cos}^2\beta + \text{Sen}^2\beta \cdot \text{Sen}^2\alpha$$

$$E = \text{Sen}^2\alpha(\text{Cos}^2\beta + \text{Sen}^2\beta)$$

$$E = \text{Sen}^2\alpha$$

6. Siendo: $\text{Sen}\alpha + \text{Sen}\beta + \text{Sen}\theta = 0$

$$\text{Cos}\alpha + \text{Cos}\beta + \text{Cos}\theta = 0$$

Calcular:

$$E = \text{Cos}(\alpha - \beta) + \text{Cos}(\beta - \theta) + \text{Cos}(\theta - \alpha)$$

Resolución:

$$\text{Cos}\alpha + \text{Cos}\beta = -\text{Cos}\theta$$

$$\text{Sen}\alpha + \text{Sen}\beta = -\text{Sen}\theta$$

Al cuadrado:

$$\left. \begin{aligned} \text{Cos}^2\alpha + \text{Cos}^2\beta + 2\text{Cos}\alpha \cdot \text{Cos}\beta &= \text{Cos}^2\theta \\ \text{Sen}^2\alpha + \text{Sen}^2\beta + 2\text{Sen}\alpha \cdot \text{Sen}\beta &= \text{Sen}^2\theta \end{aligned} \right\} +$$

$$1 + 1 + 2 \cdot \text{Cos}(\alpha - \beta) = 1$$

$$\text{Cos}(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2}$$

Por analogía:

$$\text{Cos}(\beta - \theta) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Cos}(\theta - \alpha) = -\frac{1}{2}$$

$$E = -3/2$$

Propiedades :

$$\boxed{\text{Tag}(A + B) = \text{Tag}A + \text{Tag}B + \text{Tag}A \cdot \text{Tag}B \cdot \text{Tag}C}$$

Ejm.

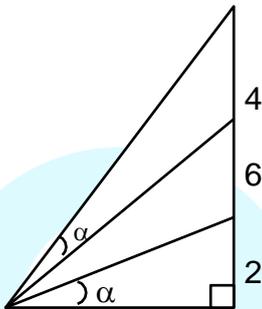
$$\text{Tg}18^\circ + \text{tg}17^\circ + \text{tg}36^\circ \text{tg}18^\circ \text{tg}17^\circ = \text{tg}35^\circ$$

$$\text{Tg}20^\circ + \text{tg}40^\circ + \sqrt{3} \text{tg}20^\circ \text{tg}40^\circ = \sqrt{3}$$

↓
(tg60°)

$$\begin{aligned} \text{tg}22^\circ + \text{tg}23^\circ + \text{tg}22^\circ \cdot \text{tg}23^\circ &= 1 \\ \text{tg}\alpha + \text{tg}2\alpha + \text{tg}\alpha \text{tg}2\alpha \text{tg}3\alpha &= \text{tg}3\alpha \end{aligned}$$

8. Hallar tgα si:



Resolución:

.....

9. Siendo:

$$\text{tg}(x-y) = \frac{a-b}{a+b}, \text{tg}(y-z) = 1$$

Hallar: tg(x-z)

Resolución

.....

10. Siendo "Tag α" + "Tagβ" las raíces de la ecuación:

$$a \cdot \text{sen } \theta + b \cdot \text{Cos } \theta = c$$

Hallar: Tg(α + β)

Resolución:

Dato: $a \text{ Sen}\theta + b \text{ Cos}\theta = c$

$$a \text{ Tg}\theta + b = c \cdot \text{Sec } \theta$$

$$a^2 \text{tg}^2\theta + b^2 + 2ab\text{tg}\theta = c^2 (1 + \text{tg}^2\theta)$$

$$(a^2 - c^2) \text{tg}^2 \theta + (2ab)\text{tg}\theta + (b^2 - c^2) = 0$$

$$\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta = \frac{-2ab}{a^2 - c^2}$$

$$\text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}$$

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta} = \frac{\frac{-2ab}{a^2 - c^2}}{1 - \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{-2ab}{a^2 - b^2} = \frac{2ab}{b^2 - a^2}$$

Propiedades Adicionales

$$\boxed{\text{Tag} \pm \text{Tag}b = \frac{\text{Sen}(a \pm b)}{\text{Cosa} \cdot \text{Cos}b}}$$

$$\boxed{\text{Ctga} \pm \text{Ctgb} = \frac{\text{Sen}(a \pm b)}{\text{Sena} \cdot \text{Sen}b}}$$

$$\boxed{\text{Sen}(\alpha + \theta) \cdot \text{Sen}(\alpha - \theta) = \text{Sen}^2\alpha - \text{Sen}^2\theta}$$

$$\boxed{\text{Cos}(\alpha + \theta) \cdot \text{Cos}(\alpha - \theta) = \text{Cos}^2\alpha - \text{Sen}^2\theta}$$

Si: a + b + c = 180°

$$\boxed{\text{Tag}a + \text{Tag}b + \text{Tag}c = \text{Tag}a \cdot \text{Tag}b \cdot \text{Tag}c}$$

$$\boxed{\text{Ctga} \cdot \text{Ctgb} + \text{Ctga} \cdot \text{Ctgc} + \text{Ctgb} \cdot \text{Ctgc} = 1}$$

Si: a + b + c = 90°

$$\boxed{\text{Ctga} + \text{Ctgb} + \text{Ctgc} = \text{Ctga} \cdot \text{Ctgb} \cdot \text{Ctgc}}$$

$$\boxed{\text{Tag}a \cdot \text{Tag}b + \text{Tag}a \cdot \text{Tag}c + \text{Tag}b \cdot \text{Tag}c = 1}$$

EJERCICIOS

1. Si: $\text{Sen}\alpha = -\frac{3}{5}$; $\alpha \in \text{III C}$;

$\text{Cos}\beta = \frac{12}{13}$, $\beta \in \text{IV C}$. Hallar:

E = Sen(α + β)

- a) -16/65 b) 16/65 c) 9/65
d) 13/64 e) 5/62

2. Reducir : $E = \frac{\text{Sen}(a-b)}{\text{Cosa.Cosb}} + \text{Tagb}$

- a) Taga b) Tagb c) $\text{Tag}(a-b)$
 d) $\text{Tag}(a+b)$ e) Ctga

3. Si : $\text{Cos}(a+b) - \text{Cos}(a-b) = \frac{1}{2}$

Hallar $E = \text{Csc}a.\text{Csc}b$

- a) -2 b) -3 c) -4
 d) -5 e) -6

4. Si : $\text{Sen}\theta = -\frac{5}{13}$; $\theta \in \text{III C}$; $\text{Tag } \alpha = 1$;

$\alpha \in \text{III C}$

Hallar $E = \text{Sen}(\theta + \alpha)$

- a) $17\sqrt{2}/13$ b) $17\sqrt{2}/15$ c) $17\sqrt{2}/14$
 d) $17\sqrt{2}/26$ e) $5\sqrt{2}/26$

5. Reducir : $G = \frac{\text{Cos}(a-b) - \text{Cos}(a+b)}{2\text{Sena}}$

- a) $\text{Sen}b$ b) Sena c) Cosa
 d) $\text{Cos}b$ e) 1

6. Reducir : $M = \sqrt{8}\text{Sen}(\theta + 45^\circ) - 2\text{Sen}\theta$

- a) $2\text{Cos}\theta$ b) $2\text{Sen}\theta$ c) $3\text{Cos}\theta$
 d) $2\text{Sen}\theta \text{Cos}\theta$ e) $\text{Ctg}\theta$

7. Reducir : $E = \frac{\text{Sen}(a+b) - \text{Sen}b.\text{Cosa}}{\text{Sen}(a-b) + \text{Sen}b.\text{Cosa}}$

- a) 1 b) -1 c) $\text{Taga.Ctg}b$
 d) Tgb.Ctga e) 2

8. Reducir : $E = \text{Cos}(60^\circ + x) + \text{Sen}(30^\circ + x)$

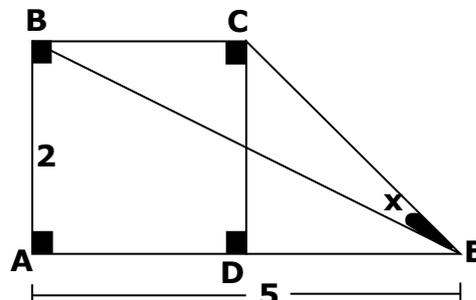
- a) $\text{Sen}x$ b) $\text{Cos}x$ c) $\sqrt{3}\text{Sen}x$
 d) $-\text{Cos}x$ e) $\sqrt{3}\text{Cos}x$

9. Si se cumple: $\text{Cos}(a-b) = 3\text{Sena}\text{Sen}b$
 Hallar $M = \text{Taga}.\text{Tagb}$

- a) -1/2 b) -2 c) 1/2
 d) 1 e) 1/4

10. Si ABCD es un cuadrado. Hallar $\text{Tag}x$

- a) 19/4
 b) 4/19
 c) 1/2
 d) 7/3
 e) 3/4



11. Reducir :

$E = \text{Cos}80^\circ + 2\text{Sen}70^\circ.\text{Sen}10^\circ$

- a) 1 b) 2 c) 1/2
 d) 1/4 e) 1/8

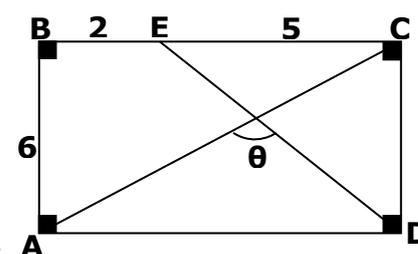
12. Si: $\text{Tag}\alpha + \text{Tag}\beta = \frac{2}{3}$; $\text{Ctg}\alpha + \text{Ctg}\beta = \frac{5}{2}$

Hallar $E = \text{Tag}(\alpha + \beta)$

- a) 11/10 b) 10/11 c) 5/3
 d) 13/10 e) 1/2

13. Hallar : $\text{Ctg}\theta$

- a) 1/2
 b) 1/32
 c) 1/48
 d) 1/64
 e) -1/72



14. Hallar : $M = (\text{Tag}80^\circ - \text{Tag}10^\circ)\text{Ctg}70^\circ$

- a) 2 b) 1 c) 1/2
 d) 3 e) 1/3

15. Hallar el máximo valor de:
 $M = \text{Sen}(30^\circ + x) + \text{Cos}(60^\circ + x)$

- a) 1 b) 2/3 c) 4/3
 d) 5/3 e) 1/7

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

PRIMER CASO:

Reducción para arcos positivos menores que 360°

$$\text{f.t. } \begin{cases} 180 \pm \alpha \\ 360 \pm \alpha \end{cases} = \pm \text{f.t.} \{ \alpha \}$$

↙ Depende del cuadrante ↘

$$\text{f.t. } \begin{cases} 90 \pm \alpha \\ 270 \pm \alpha \end{cases} = \pm \text{cof.t.} \{ \alpha \}$$

Ejm:

$$\text{Sen } 200^\circ = (\text{Sen } 180^\circ + 20^\circ) = -\text{Sen } 20^\circ$$

$$\text{Tg } 300^\circ = (\text{Tg } 300^\circ - 60^\circ) = -\text{Tg } 60^\circ$$

$$\text{Cos } \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = -\text{Sen } x$$

$$\text{Sec } \frac{8\pi}{7} = \text{sec} \left(\pi + \frac{\pi}{7} \right) = -\text{Sec } \frac{\pi}{7}$$

SEGUNDO CASO:

Reducción para arcos positivos mayores que 360°

$$\text{f.t. } (360^\circ \cdot n + \alpha) = \text{f.t. } (\alpha); "n" \in \mathbf{Z}$$

Ejemplos:

$$1) \text{ Sen } 555550^\circ = \text{Sen } 70^\circ$$

$$\begin{array}{r} 555550^\circ \quad 360^\circ \\ \underline{1955} \quad \underline{1943} \\ -1555 \\ \underline{1150} \\ -70^\circ \end{array}$$

$$2) \text{ Cos } \frac{62\pi}{5} = \text{Cos} \left(12\pi + \frac{2\pi}{5} \right) = \text{Cos } \frac{2\pi}{5}$$

TERCER CASO:

Reducción para arcos negativos

$$\text{Sen}(-\alpha) = -\text{Sen} \alpha \quad \text{Ctg}(-\alpha) = -\text{Ctg} \alpha$$

$$\text{Cos}(-\alpha) = \text{Cos} \alpha \quad \text{Sec}(-\alpha) = \text{Sec} \alpha$$

$$\text{Tg}(-\alpha) = -\text{Tg} \alpha \quad \text{Csc}(-\alpha) = -\text{Csc} \alpha$$

Ejemplos:

$$\text{Sen}(-30^\circ) = -\text{Sen} 30^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{Cos}(-150^\circ) &= \text{Cos } 150^\circ \\ &= \text{Cos}(180^\circ - 30^\circ) \\ &= -\text{Cos } 30^\circ \end{aligned}$$

$$\text{Tg} \left(x - \frac{3\pi}{2} \right) = -\text{Tg} \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = -\text{ctgx}$$

ARCOS RELACIONADOS

a. Arcos Suplementarios

$$\text{Si: } \alpha + \beta = 180^\circ \text{ ó } \pi$$

$$\rightarrow \text{Sen} \alpha = \text{Sen} \beta$$

$$\text{Csc} \alpha = \text{Csc} \beta$$

Ejemplos:

$$\text{Sen} 120^\circ = \text{Sen} 60^\circ$$

$$\text{Cos} 120^\circ = -\text{Cos} 60^\circ$$

$$\text{Tg} \frac{5\pi}{7} = -\text{Tg} \frac{2\pi}{7}$$

b. Arcos Revolucionarios

$$\text{Si } \alpha + \beta = 360^\circ \text{ ó } 2\pi$$

$$\rightarrow \text{Cos} \alpha = \text{Cos} \beta$$

$$\text{Sec} \alpha = \text{Sec} \beta$$

Ejemplos:

$$\text{Sen} 300^\circ = -\text{Sen} 60^\circ$$

$$\text{Cos} 200^\circ = \text{Cos} 160^\circ$$

$$\text{Tg} \frac{8\pi}{5} = -\text{Tg} \frac{2\pi}{5}$$

EJERCICIOS

1. Reducir $E = \cos 330^\circ \cdot \operatorname{Ctg} 150^\circ$

- a) $-1/2$ b) $3/2$ c) $-3/2$
 d) $-5/2$ e) $7/2$

2. Reducir : $M = \operatorname{Sen} 1200^\circ \cdot \operatorname{Ctg} 1500^\circ$

- a) $1/2$ b) $\sqrt{3}/2$ c) $\sqrt{3}/3$
 d) $-2\sqrt{3}/3$ e) $-\sqrt{3}/3$

3. Reducir $A = \frac{\operatorname{Tag}(-x) \cdot \operatorname{Sen}(2\pi - x)}{\operatorname{Ctg}(\frac{\pi}{2} + x) \operatorname{Cos}(\pi + x)}$

- a) $\operatorname{Tag}x$ b) $-\operatorname{Tag}x$ c) 1
 d) $\operatorname{Sen}x$ e) -1

4. Hallar :

$$M = \operatorname{Ctg}53\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{Sen}325\frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{Sec}41\frac{\pi}{4}$$

- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}/2$ c) $-\sqrt{2}$
 d) $-\sqrt{2}/2$ e) 1

5. Reducir: $A = \frac{\operatorname{Ctg}1680^\circ \cdot \operatorname{Tag}1140^\circ}{\operatorname{Cos}300^\circ}$

- a) 2 b) -2 c) $1/2$
 d) $\sqrt{3}$ e) $-\sqrt{3}$

6. Reducir:

$$M = \frac{\operatorname{Sen}(-\theta) - \operatorname{Sen}(\pi - \theta)}{\operatorname{Sen}(2\pi - \theta) + \operatorname{Cos}(3\frac{\pi}{2} - \theta)}$$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) -2 e) -1

7. Si: $\operatorname{Sen}(\frac{\pi}{2} + \theta) = \frac{m-1}{2}$, $\operatorname{Cos}(2\pi - \theta) = -\frac{m}{3}$

Hallar " m "

- a) $1/5$ b) $2/5$ c) $3/5$
 d) $4/5$ e) $6/5$

8. Reducir: $A = \frac{\operatorname{Sen}(-1920^\circ) \operatorname{Ctg}(2385^\circ)}{\operatorname{Sec}(\frac{5\pi}{6}) \cdot \operatorname{Ctg} \frac{7\pi}{4}}$

- a) $-3/4$ b) $-4/3$ c) $5/2$
 d) $1/4$ e) 2

9. Reducir:

$$M = \operatorname{Cos}123\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{Tag}17\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{Sen}125\frac{\pi}{6}$$

- a) $\sqrt{2}/2$ b) $\sqrt{2}/4$ c) $\sqrt{6}/4$
 d) $\sqrt{6}/6$ e) $1/6$

10. Reducir:

$$M = \frac{\operatorname{Cos}(\pi - x) \operatorname{Sen}(\frac{3\pi}{2} + x) \operatorname{Sen}^2(\pi + x)}{\operatorname{Ctg}^2(\frac{3\pi}{2} - x)}$$

- a) 1 b) Sen^4x c) Cos^4x
 d) Sen^2x e) Cos^2x

11. Si se cumple que :

$$\operatorname{Sen}(180^\circ + x) \cdot \operatorname{Sen}(360^\circ - x) = 1/3$$

Hallar $E = \operatorname{Tag}^2x + \operatorname{Ctg}^2x$

- a) $5/3$ b) $2/3$ c) $2/5$
 d) $1/3$ e) $5/2$

12. Siendo : $x + y = 180^\circ$

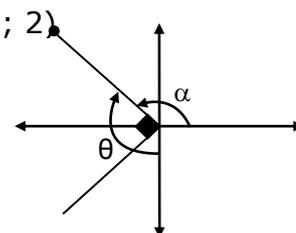
Hallar:

$$A = \frac{\operatorname{Sen}(20^\circ + x) + \operatorname{Cos}(y + 40^\circ)}{\operatorname{Cos}(140^\circ - y) + \operatorname{Sen}(200^\circ + x)}$$

- a) -1 b) 2 c) -2 d) 1 e) 0

13. Del gráfico hallar $E = \operatorname{Tag}\theta + \operatorname{Tag}\alpha$

- a) $5/6$ b) $1/5$
 c) $1/6$ d) $6/5$
 e) $2/5$



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ARCO DOBLE Y MITAD

I. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ARCO DOBLE

1. Seno de 2α :

$$\text{Sen } 2\alpha = 2\text{Sen}\alpha \text{ Cos}\alpha$$

2. Coseno de 2α :

$$\text{Cos } 2\alpha = \text{Cos}^2\alpha - \text{Sen}^2\alpha$$

$$\text{Cos } 2\alpha = 1 - 2 \text{Sen}^2\alpha \quad \dots \text{ (I)}$$

$$\text{Cos } 2\alpha = 2 \text{Cos}^2\alpha - 1 \quad \dots \text{ (II)}$$

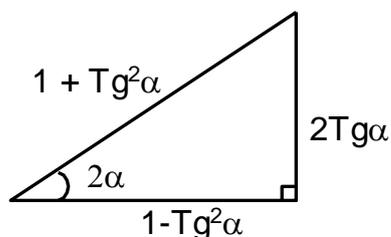
3. Fórmulas para reducir el exponente (Degradan Cuadrados)

De (I)... $2 \text{Sen}^2\alpha = 1 - \text{Cos } 2\alpha$

De (II).. $2 \text{Cos}^2\alpha = 1 + \text{Cos } 2\alpha$

4. Tangente de 2α :

$$\text{tg}2\alpha = \frac{2\text{Tg}\alpha}{1 - \text{Tg}^2\alpha}$$



Del triángulo rectángulo:

$$* \text{ Sen } 2\alpha = \frac{2\text{tg}\alpha}{1 + \text{tg}^2\alpha}$$

$$* \text{ Cos } 2\alpha = \frac{1 - \text{tg}^2\alpha}{1 + \text{tg}^2\alpha}$$

5. Especiales:

- $\text{Ctg}\alpha + \text{Tg}\alpha = 2\text{Csc } 2\alpha$

- $\text{Ctg}\alpha - \text{Tg}\alpha = 2\text{Ctg}2\alpha$

- $\text{Sec } 2\alpha + 1 = \frac{\text{tg}2\alpha}{\text{tg}\alpha}$

- $\text{Sec } 2\alpha - 1 = \text{tg}2\alpha \cdot \text{tg}\alpha$

- $8\text{Sen}^4\alpha = 3 - 4 \text{Cos}2\alpha + \text{Cos}4\alpha$

- $8\text{Cos}^4\alpha = 3 + 4 \text{Cos}2\alpha + \text{Cos}4\alpha$

- $\text{Sen}^4\alpha + \text{Cos}^4\alpha = \frac{3 + \text{Cos}4\alpha}{4}$

- $\text{Sen}^6\alpha + \text{Cos}^6\alpha = \frac{5 + 3\text{Cos}4\alpha}{8}$

EJERCICIOS

1. Reducir: $R = \frac{1 + \text{Sen}2x + \text{Cos}2x}{1 + \text{Sen}2x - \text{Cos}2x}$

Resolución:

$$R = \frac{1 + \text{Cos}2x + \text{Sen}2x}{1 - \text{Cos}2x + \text{Sen}2x} = \frac{2\text{Cos}^2x + 2\text{Sen}x\text{Cos}x}{2\text{Sen}^2x + 2\text{Sen}x\text{Cos}x}$$

$$R = \frac{2\text{Cos}x(\text{Cos}x + \text{Sen}x)}{2\text{Sen}x(\text{Sen}x + \text{Cos}x)} = \text{Ctg}x$$

2. Simplificar:

$$E = \frac{(\text{Sen}2x + \text{Sen}x)(\text{Sen}2x - \text{Sen}x)}{(1 + \text{Cos}x + \text{Cos}2x)(1 - \text{Cos}x + \text{Cos}2x)}$$

Resolución

$$E = \frac{(2\text{Sen}x\text{Cos}x + \text{Sen}x)(\text{Sen}x\text{Cos}x - \text{Sen}x)}{(2\text{Cos}^2x + \text{Cos}x)(2\text{Cos}^2x - \text{Cos}x)}$$

$$E = \frac{\text{Sen}x(2\text{Cos}x + 1)\text{Sen}x(2\text{Cos}x - 1)}{\text{Cos}x(2\text{Cos}x + 1)\text{Cos}x(2\text{Cos}x - 1)} = \text{tg}x.\text{tg}x$$

$E = \text{tg}^2x$

3. Siendo: $\frac{\text{Sen}\theta}{b} = \frac{\text{Cos}\theta}{a}$

Reducir: $P = a\text{Cos}2\theta + b\text{Sen}2\theta$

Resolución:

$$\begin{aligned} &= a\text{Cos}2\theta + b.2\text{Sen}\theta.\text{Cos}\theta \\ &= a\text{Cos}2\theta + b\text{Cos}\theta. 2\text{Sen}\theta \quad \underbrace{\hspace{2cm}} \\ &= a\text{Cos}2\theta + a\text{Sen}\theta. 2\text{Sen}\theta \\ &= a\text{Cos}2\theta + a(2\text{Sen}^2\theta)(1 - \text{Cos}2\theta) \end{aligned}$$

$P = a\text{Cos}2\theta + a - a\text{Cos}2\theta \rightarrow \mathbf{P = a}$

4. Si $\text{tg}^2x - 3\text{tg}x = 1$

Calcular: $\text{tg}2x$

Resolución:

Sabemos:

$$\text{Tg}2x = \frac{2\text{tg}x}{1 - \text{tg}^2x}$$

Del Dato:

$$-3 \text{tg}x = 1 - \text{tg}^2x$$

$$\text{tg}2x = \frac{2\text{tg}x}{-3\text{tg}x} = -\frac{2}{3}$$

5. Siendo: $2\text{tg}x + 1 = 2\text{Ctg}x$

Calcular: $\text{Ctg}4x$

Resolución:

Del dato:

$$\begin{aligned} 1 &= 2(\text{Ctg}x - \text{Tg}x) \\ 1 &= 2(2\text{Ctg}2x) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} = \text{Ctg}2x$$

Notamos: $2\text{Ctg}4x = \text{Ctg}2x - \text{Tg}2x$

$$\text{Ctg}4x = \frac{\frac{1}{4} - 4}{2}$$

$$\text{Ctg}4x = -\frac{15}{8}$$

6. Siendo: $\text{Sec}x = 8\text{Sen}x$

Calcular: $\text{Cos}4x$

Dato : $\frac{1}{\text{Cos}x} = 4.2\text{Sen}x \Rightarrow \frac{1}{4} = 2\text{Sen}x.\text{Cos}x$

$$\frac{1}{4} = \text{Sen}2x$$

Nos pide:

$$\text{Cos}4x = 1 - 2 \text{Sen}^2 2x$$

$$= 1 - 2 \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{8}$$

$$\text{Cos}4x = \frac{7}{8}$$

7. Determinar la extensión de:

$$F(x) = \text{Sen}^6 x + \text{Cos}^6 x$$

$$F(x) = 1 - \frac{3}{4} \cdot 2^2 \text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos}^2 x$$

$$F(x) = 1 - \frac{3}{4} \cdot \text{Sen}^2 2x$$

Sabemos:

$$0 \leq \text{Sen}^2 2x \leq 1$$

$$-\frac{3}{4} \leq -\frac{3}{4} \text{Sen}^2 2x \leq 0$$

$$\frac{1}{4} \leq -\frac{3}{4} \text{Sen}^2 2x + 1 \leq 1$$

$$\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 1$$

Propiedad:

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leq \text{Sen}^{2n} x + \text{Cos}^{2n} x \leq 1$$

8. Calcular

$$E = \text{Cos}^4 \frac{\pi}{12} + \text{Cos}^4 \frac{5\pi}{12} + \text{Cos}^4 \frac{7\pi}{12} + \text{Cos}^4 \frac{11\pi}{12}$$

Resolución:

$$E = \text{Cos}^4 \frac{\pi}{12} + \text{Cos}^4 \frac{5\pi}{12} + \text{Cos}^4 \frac{5\pi}{12} + \text{Cos}^4 \frac{\pi}{12}$$

$$E = 2 \left(\text{Cos}^4 \frac{\pi}{12} + \text{Cos}^4 \frac{5\pi}{12} \right)$$

$$E = 2 \left(\text{Cos}^4 \frac{\pi}{12} + \text{Sen}^4 \frac{\pi}{12} \right)$$

$$E = 2 - 2^2 \cdot \text{Sen}^2 \frac{\pi}{12} \cdot \text{Cos}^2 \frac{\pi}{12}$$

$$E = 2 - \text{Sen}^2 \frac{\pi}{6} = 2 - \frac{1}{4} = 7/4$$

EJERCICIOS

1. Si : $\text{Csc} x = \sqrt{3}$.

Hallar : $E = \text{Sen} 2x$

a) $2\sqrt{2}/3$ b) $\sqrt{3}/6$ c) $\sqrt{2}/6$

d) $\sqrt{2}/4$ e) $4\sqrt{2}/7$

2. Si: $\text{Tag} \theta = -1/5$. Calcular : $E = \text{Cos} 2\theta$

a) $12/13$ b) $5/13$ c) $1/8$

d) $2/7$ e) $3/5$

3. Si: $\text{Sen} x - \text{Cos} x = \frac{1}{5}$ Hallar $E = \text{Csc} 2x$

a) $12/13$ b) $25/24$ c) $7/25$

d) $13/5$ e) $5/4$

4. Si: $\text{Tag} (\pi + \theta) = \frac{1}{2}$ Hallar :

$E = \text{Tag} 2\theta$

a) $-1/4$ b) $-3/4$ c) $5/4$

d) $-7/4$ e) $9/4$

5. Reducir:

$$M = 2\text{Sen} x \text{Cos}^3 x + 2\text{Cos} x \text{Sen}^3 x$$

- a) $\cos 2x$ b) $\sin 2x$ c) $\tan x$
 d) $\cot 2x$ e) 1

6. Si: $\sin \alpha = \frac{1}{3}$

Hallar E = $E = 3 - \frac{2}{9} \cos 2\alpha + \cos 4\alpha$

- a) 82/27 b) 81/26 c) 49/27
 d) 17/32 e) 12/17

7. Reducir:

$$M = \frac{5 + 3\cos 4x}{\cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x}$$

- a) 2 b) 4 c) 8 d) 12 e) 16

8. Si se cumple:

$$\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x \equiv A \cos 4x + B$$

- a) 3/5 b) 1/2 c) 2/5
 d) 3/10 e) 1/5

9. Reducir: $M = \frac{\sin 10^\circ \sin 80^\circ}{\cos 10^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ}$

- a) 1/2 b) 1/3 c) 1/4
 d) 1/5 e) 1/6

10. Si se cumple:

$$\frac{\tan^4 \theta + \sec^2 \theta + \tan^2 \theta}{2 \tan \theta - 2 \tan^3 \theta} = \frac{8}{3}$$

Hallar E = $\sin 4\theta$

- a) 1/3 b) 1/2 c) 3/4
 d) 1/4 e) 5/7

11. Reducir:

$$M = \frac{2 \sin 2\theta - \sin \theta}{\sin 3\theta + 4 \sin 2\theta \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

- a) 1 b) 1/2 c) 1/3
 d) 1/4 e) 2

II. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ARCO MITAD

1. Seno de $\frac{\alpha}{2}$:

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

2. Coseno de $\frac{\alpha}{2}$:

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

Donde:

(\pm) Depende del cuadrante al cual $\in \frac{\alpha}{2}$

3. Tangente de $\frac{\alpha}{2}$:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

4. Cotangente de $\frac{\alpha}{2}$:

$$\cot \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$$

5. Fórmulas Racionalizadas

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \csc \alpha - \cot \alpha$$

$$\cot \frac{\alpha}{2} = \csc \alpha + \cot \alpha$$

EJERCICIOS

1. Reducir

$$P = \left(\frac{\text{Sen}2\alpha}{1 + \text{Cos}2x} \right) \left(\frac{\text{Cos}\alpha}{1 + \text{Cos}x} \right)$$

Resolución:

$$P = \frac{2 \cdot \text{Sen}x \cdot \text{Cos}x}{2 \cdot \text{Cos}^2 x} \cdot \frac{\text{Cos}x}{2 \text{Cos}^2 \frac{x}{2}} = \frac{\text{Sen}x}{2 \text{Cos}2 \frac{x}{2}}$$

$$P = \frac{2 \text{Sen} \frac{x}{2} \cdot \text{Cos} \frac{x}{2}}{2 \text{Cos}^2 \frac{x}{2}} = \text{tg} \frac{x}{2}$$

2. Siendo:

$$\text{Cos}\alpha = \frac{a^2 - b^2 + (a^2 + b^2)\text{Cos}\theta}{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\text{Cos}\theta}$$

Hallar:

$$\text{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \text{Ctg} \frac{\theta}{2}$$

Resolución:

del dato:

$$\frac{1}{\text{Cos}\alpha} = \frac{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\text{Cos}\theta}{a^2 - b^2 + (a^2 + b^2)\text{Cos}\theta}$$

Por proporciones

$$\frac{1 - \text{Cos}\alpha}{1 + \text{Cos}\alpha} = \frac{2b^2 - 2b^2\text{Cos}\theta}{2a^2 + 2a^2\text{Cos}\theta}$$

$$\text{Tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2b^2(1 - \text{Cos}\theta)}{2a^2(1 + \text{Cos}\theta)}$$

$$\text{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{a} \cdot \text{tg} \frac{\theta}{2}$$

$$\text{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \text{Ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{b}{a}$$

1. Relaciones Principales

$$\underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}}_{n \text{ radianes}} = 2 \text{Sen} \left[\frac{\pi}{2^{n+1}} \right]$$

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}}_{n \text{ radianes}} = 2 \text{Cos} \left[\frac{\pi}{2^{n+1}} \right]$$

EJERCICIOS

1. Si: $\text{Cos}x = 1/4$; $x \in$ III Cuadrante

Hallar $E = \text{Sen} \left(\frac{x}{2} \right)$

- a) $\sqrt{10}/4$ b) $-\sqrt{10}/4$ c) $\sqrt{2}/4$
 d) $\sqrt{5}/4$ e) $-\sqrt{5}/4$

2. Si : $\text{Ctg}x = \frac{5}{12}$; $x \in$ III Cuadrante

Hallar $M = \text{Cos} \left(\frac{x}{2} \right)$

- a) $2/\sqrt{13}$ b) $1/\sqrt{13}$ c) $-2/\sqrt{13}$
 d) $-1/\sqrt{13}$ e) $3/\sqrt{13}$

3. Si. $\text{Cos}x = 1/3$; $3\pi/2 < x < 2\pi$

Hallar $E = \text{Tag} \left(\frac{x}{2} \right)$

- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}/2$ c) $-\sqrt{2}/2$
 d) $-\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{2}$

4. Si : $90^\circ < x < 180^\circ$ y $\text{Tag}^2 x = 32/49$

Hallar : $\text{Cos}(x/2)$

- a) $-4/7$ b) $-3/7$ c) $1/3$
 d) $3/7$ e) $4/7$

5. Reducir : $E = \text{Sen}x(\text{Tag}x \cdot \text{Ctg} \frac{x}{2} - 1)$

- a) $\text{Ctg}x$ b) $\text{Tag}x$ c) $\text{Sen}x$
 d) $\text{Tag}x/2$ e) 1

6. Reducir:

$$E = \text{Tag} \frac{x}{4} + 2\text{Sen}^2 \left(\frac{x}{4} \right) \cdot \text{Ctg} \frac{x}{2}$$

- a) $\text{Sen}x$ b) $\text{Csc}x/2$ c) $\text{Csc}x$
 d) $1 + \text{Cos}x/2$ e) $\text{Sen}x/2$

7. Si:

$$2\text{Sen}2\theta = \text{Sen}\theta ; \theta \in \langle 270^\circ; 360^\circ \rangle$$

$$\text{Hallar } E = \sqrt{2} \left[\sqrt{3}\text{Sen} \frac{\theta}{2} + \sqrt{5} \text{Cos} \frac{\theta}{2} \right]$$

- a) 1 b) -1 c) 0
 d) 1/2 e) 2

8. Reducir:

$$M = \text{Tag}x + \text{Ctg} \frac{x}{2} - \text{Ctg} \frac{x}{2} \text{Sec}x$$

- a) 1 b) 2 c) -1
 d) 0 e) 1/2

9. Reducir: $A = \text{Tag}(45^\circ + \frac{\theta}{2}) - \text{Sec}\theta$

- a) $\text{Tag} \theta$ b) $\text{Ctg} \theta$ c) $\text{Sec} \theta$
 d) $\text{Csc} \theta$ e) $\text{Sen} \theta$

10. Hallar $E = \text{Tag}7^\circ 30''$

- a) $\sqrt{6} - \sqrt{2} - 2 + \sqrt{3}$
 b) $\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$
 c) $\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$
 d) $\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + 2$
 e) $\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$

11. Siendo x un ángulo positivo del III cuadrante; menor que una vuelta y se sabe: $3\text{Sen}2x + 2\sqrt{5}\text{Cos}x = 0$

Hallar $E = \text{Tag} x/2$

- a) $-\sqrt{5}$ b) $-\sqrt{2}$ c) $-\sqrt{3}$
 d) $\sqrt{2}$ e) 1/3

12. Reducir:

$$P = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\frac{1 + \text{Cos}x}{2}}}{2}} ; x \in \langle \pi ; 2\pi \rangle$$

- a) $\text{Cos} x/2$ b) $-\text{Cos} x/4$
 c) $\text{Sen} x/4$ d) $-\text{Sen} x/4$
 e) $-\text{Tag} x/4$

13. Reducir: $M = \frac{\text{Tag} \frac{x}{2} - \text{Tag} \frac{x}{4}}{\text{Tag} \frac{x}{2} - 2 \text{Tag} \frac{x}{4}}$

- a) $\frac{1}{2}\text{Sec}^2 x/4$ b) $\frac{1}{2}\text{Ctg}^2 x/4$
 c) $\frac{1}{2}\text{Csc}^2 x/4$ d) $\text{Csc}^2 x/4$ e) 1

14. Si: $4\text{Cos} \frac{x}{4} - 2\text{Cos} \frac{x}{2} = 3$

Hallar $E = 5 - 4 \text{Cos}x$

- a) 2 b) 7 c) 6
 d) 8 e) 10

15. Reducir:

$$M = \left(1 + \text{Sen} \frac{x}{2} \right) \text{Ctg}^2 \left[\frac{\pi}{4} + \frac{x}{4} \right] + \text{Sen}^2 \frac{x}{2} \cdot \text{Csc} \frac{x}{2}$$

- a) 1 b) 2 c) 1/2
 d) 1/4 e) 1/6

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ARCO TRIPLE

$$\text{Sen } 3x = \begin{cases} 3\text{Sen}x - 4 \text{ Sen}^3x \\ \text{Sen}x (2\text{Cos } 2x + 1) \end{cases}$$

$$\text{Cos}3x = \begin{cases} 4\text{Cos}^3x - 3 \text{Cos}x \\ \text{Cos}x (2\text{Cos } 2x - 1) \end{cases}$$

$$\text{tang}3x = \frac{3 \tan x - \text{Tan}^3x}{1 - 3\text{Tan}^2x}$$

Ejm. Reducir: $\frac{3\text{Sen}x - \text{Sen}^3x}{\text{Sen}^3x} = \frac{3\text{Sen}x - (3\text{Sen}x - 4\text{Sen}^3x)}{\text{Sen}^3x} = \frac{4\text{Sen}^3x}{\text{Sen}^3x} = 4$

Hallar P = $4 \text{Cos}^2x - \frac{\text{Cos}3x}{\text{Cos}x} = P = \frac{4\text{Cos}^2x}{1} - \left(\frac{4\text{Cos}^3x - 3\text{Cos}x}{\text{Cos}x} \right) = \frac{3\text{Cos}x}{\text{Cos}x} = 3$

Reducir: $M = 9 \text{Sen}x - 12\text{Sen}^3x - 4\text{Sen}^33x$

$$M = 3 (3\text{Sen}x - 4 \text{ Sen}^3x) - 4 \text{ Sen}^33x$$

$$M = 3 \text{ Sen}3x - 4 \text{ Sen}33x = \text{Sen } 9x$$

1. Reducir

$$A = \frac{2 \text{Cos}2x \text{Cos}x - \text{Cos}x}{2 \text{Cos}2x \text{Sen}x + \text{Sen}x}$$

Resolución:

$$A = \frac{\text{Cos}x(2\text{Cos}2x - 1)}{\text{Sen}x(2\text{Cos}2x + 1)} = \frac{\text{Cos}3x}{\text{Sen}3x} = \text{Ctg}3x$$

2. Si $\text{Tan}3x = 11\text{Tan}x$ Hallar $\text{cos } "2x"$

Resolución:

$$\frac{\text{Sen}3x}{\text{Cos}3x} = \frac{11\text{Sen}x}{\text{Cos}x} \rightarrow \frac{\text{Sen}x(2\text{Cos}2x + 1)}{\text{Cos}x(2\text{Cos}2x - 1)} = 11 \frac{\text{sen}x}{\text{cos}x}$$

$$\frac{4\text{Cos}2x}{2} = \frac{12}{10} \rightarrow \text{Cos}2x = \frac{3}{5}$$

3. Sabiendo $\tan(30^\circ - x) = 2$. Hallar $\tan 3x$

Resolución

Hacemos $\tan(30^\circ - x) = 2 \rightarrow \tan \theta = 2$

$$\tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} = \frac{3 \cdot 2 - 8}{1 - 12} = \frac{2}{11}$$

Luego:

$$\tan 3\theta = \frac{2}{11} \rightarrow \tan [3(30^\circ - x)] = \frac{2}{11}$$

$$\tan(90^\circ - 3x) = \frac{2}{11} \rightarrow \cot 3x = \frac{2}{11}$$

$$\tan 3x = \frac{11}{2}$$

4. Si $\tan 3x = m \tan x$

Hallar :

$$\frac{\tan 3x \cdot \csc x}{\tan x} = 2 \cos 2x + 1$$

Resolución:

Dato:

$$\frac{\tan 3x \cdot \csc x}{\tan x} = 2 \cos 2x + 1$$

$$\frac{\tan 3x}{\cos 3x} = m \frac{\tan x}{\cos x} = \frac{\tan x (2 \cos 2x + 1)}{\cos x (2 \cos 2x - 1)} = m \frac{\tan x}{\cos x} \rightarrow \text{(proporciones)}$$

$$\frac{2 \cos 2x + 1}{2} = \frac{m}{m - 1} \rightarrow 2 \cos 2x + 1 = \frac{2m}{m - 1}$$

5. Resolver "x",

$$\text{Sabido: } 8x^3 - 6x + 1 = 0$$

$$2(4x^3 - 3x) + 1 = 0$$

$$3x - 4x^3 = + \frac{1}{2}$$

Cambio de variable $\rightarrow x = \text{Sen} \theta$

$$\underbrace{3 \text{Sen} \theta - 4 \text{Sen} 3\theta}_{=} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Sen} 3\theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = (10^\circ, 50^\circ, 130^\circ)$$

6. Calcular "x" sabiendo $x^3 - 3x = 1$
 $x = A \cos \theta$

Reemplazando : $A^3 \cos^3 \theta - 3A \cos \theta = 1 \dots (\alpha)$

$$\frac{A^3}{4} = \frac{3A}{3} \rightarrow A^2 = 4 \quad = A = 2$$

En (α)

$$8 \cos^3 \theta - 6 \cos \theta = 1$$

$$2 \cos 3\theta = 1$$

$$\cos 3\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 20^\circ \quad x = 2 \cos 20^\circ$$

PROPIEDADES IMPORTANTES

$$\begin{aligned} 4 \operatorname{Sen} x \cdot \operatorname{Sen}(60^\circ - x) \cdot \operatorname{Sen}(60^\circ + x) &= \operatorname{Sen} 3x \\ 4 \operatorname{Cos} x \cdot \operatorname{Cos}(60^\circ - x) \cdot \operatorname{Cos}(60^\circ + x) &= \operatorname{Cos} 3x \\ \operatorname{Tan} x \cdot \operatorname{tan}(60^\circ - x) \cdot \operatorname{Tan}(60^\circ + x) &= \operatorname{Tan} 3x \end{aligned}$$

1. Reducir:

$$E = \operatorname{Cos} 20^\circ \operatorname{Cos} 40^\circ \cdot \operatorname{Cos} 80^\circ$$

Resolución:

$$\begin{aligned} E &= \operatorname{Cos} 20^\circ \operatorname{Cos} 40^\circ \cdot \operatorname{Cos} 80^\circ = \frac{4}{4} \operatorname{Cos} 20^\circ \cdot \operatorname{Cos}(60^\circ - 20^\circ) \cdot \operatorname{Cos}(60^\circ + 20^\circ) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \operatorname{Cos} 60^\circ = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

2. Calcular:

$$A = \operatorname{Sen} 10^\circ \cdot \operatorname{Sen} 50^\circ \cdot \operatorname{Sen} 70^\circ$$

Resolución:

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{Sen} 10^\circ \cdot \operatorname{Sen} 50^\circ \cdot \operatorname{Sen} 70^\circ = \frac{4}{4} \operatorname{Sen} 10^\circ \cdot \operatorname{Sen}(60^\circ - 10^\circ) \cdot \operatorname{Sen}(60^\circ + 10^\circ) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \operatorname{Sen} 30^\circ = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

3. Calcular:

$$A = \frac{\operatorname{Tan} 10^\circ}{\operatorname{Tan} 20^\circ \cdot \operatorname{Tan} 40^\circ}$$

Resolución-

$$A = \frac{\tan 10^\circ}{\tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ} = \frac{\tan 10^\circ \cdot \tan 80^\circ}{\tan 20^\circ \cdot \tan (60^\circ - 20^\circ) \tan (60^\circ + 20^\circ)}$$

$$A = \frac{\tan 10^\circ \cot 10^\circ}{\tan \cdot 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. Hallar "θ", sabiendo:

$$\tan 2\theta \cdot \tan 12^\circ = \tan \theta \cdot \tan 42^\circ$$

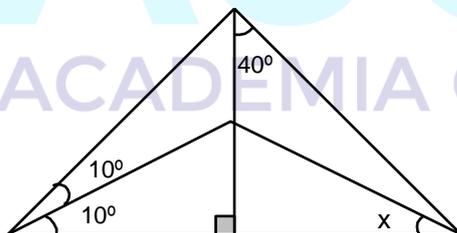
Resolución:

$$\frac{\tan 2\theta}{\tan \theta} = \frac{\tan 42^\circ}{\tan 12^\circ} = \tan 42^\circ \cdot \cot 12^\circ$$

$$\frac{\tan 2\theta}{\tan \theta} = \frac{\tan 18^\circ}{\tan 18^\circ} = \tan (60^\circ - 18^\circ) \tan (60^\circ + 18^\circ)$$

$$\frac{\tan 2\theta}{\tan \theta} = \frac{\tan 54^\circ}{\tan 18^\circ} = \tan 54^\circ \cdot \cot 18^\circ = \frac{\tan 2\theta}{\tan \theta} = \frac{\tan 72^\circ}{\tan 36^\circ} \rightarrow \theta = 36^\circ$$

4. Hallar x: en la figura:



Resolución:

$$\tan x = \frac{a \tan 10^\circ}{a \tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ} = \frac{1}{\tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 80^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

5. Hallar "Sen18°" y "Cos36°"

Resolución

Sabemos que: $\text{Sen}36^\circ = \text{Cos}54^\circ$

$$\begin{aligned} 2\text{sen}18 \cdot \text{Cos}18^\circ &= 4\text{Cos}^3 18^\circ - 3\text{Sen}18^\circ \\ 2\text{sen}18^\circ &= 4 \text{Cos}^2 18^\circ - 3 \\ 2\text{Sen}18^\circ &= 4(1 - \text{Sen}^2 18^\circ) - 3 \\ 4\text{Sen}^2 18^\circ + 2\text{Sen}18^\circ - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Sen}18^\circ = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(4)(-1)}}{2(4)} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2 \times 4}$$

Se concluye que: $2(4)$

$$\text{Sen}18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\text{Cos}36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

6. Hallar $\text{Sec}^2 10^\circ \cdot \text{Sec}^2 50^\circ \cdot \text{Sec}^2 70^\circ$

$$E = \left(\frac{4 \times 1}{4 \times \text{Cos}10^\circ \cdot \text{Cos}50^\circ \cdot \text{Cos}70^\circ} \right)$$

$$= \frac{16}{\text{Cos}^2 30^\circ} = \frac{16}{3/4} = \frac{64}{3}$$

EJERCICIOS

1. Si : $4\text{Tg}37^\circ \text{ Sen}x = 1$. Calcular $\text{Sen}3x$.
 a) 21/28 b) 21/23 c) 22/27 d) 23/27 e) 25/27
2. Si: $\text{Tg}\alpha = \frac{1}{3}$. Calcular $\text{Tg} 3\alpha$
 a) 13/3 b) 13/9 c) 13/4 d) 9/2 e) 9/4
3. Si : $\text{Sen}(180^\circ + x) = 1/3$
 Calcular : $E = \text{Sen}3x$
 a) 23/27 b) -23/27 c) 2/27 d) 14/27 e) 9/24
4. Simplificar : $A = \frac{4\text{Sen}^3 x + \text{Sen}3x}{\text{Sen}x}$
 a) $\text{Sen}x$ b) $\text{Cos}x$ c) $\text{Sen}2x$ d) $\text{Cos}2x$ e) $\text{Sen}3x$
5. Reducir : $A = \frac{4\text{Cos}^3 x - \text{Cos}3x}{\text{Cos}x}$
 a) 1 b) 2 c) 3 d) -2 e) -3
6. Reducir : $A = \frac{\text{Sen}3x}{\text{Sen}x} - 3\text{Cos}^2 x$
 a) $\text{Sen}^2 x$ b) $\text{Cos}^2 x$ c) $-\text{Sen}^2 x$ d) $-\text{Cos}^2 x$ e) $-2\text{Sen}^2 x$

7. Reducir : $A = 6\text{Sen}10^\circ - 8\text{Sen}^3 10^\circ$
 a) 1 b) 1/2 c) 1/3 d) -1 e) -1/2
8. Calcular : $A = 16\text{Cos}^3 40^\circ - 12\text{Sen}50^\circ + 1$
 a) 1 b) 2 c) 1/2 d) -1/2 e) -1
9. Reducir : $A = \frac{\text{Sen}3x + \text{Sen}^3 x}{\text{Cos}3x - \text{Cos}^3 x}$
 a) Tgx b) Ctgx c) -Tgx d) -Ctgx e) 2Ctgx
10. Dado : a. $\text{Csc}x = 3 - 4\text{Sen}^2 x$
 b. $\text{Sec}x = 4\text{Cos}^2 x - 3$
 Calcular : $a^2 + b^2$
 a) 0,2 b) 0,4 c) 0,6 0,8 e) 1,0
11. Simplificar : $A = \frac{4\text{Cos}^2 75^\circ - 3}{\text{Sec}75^\circ}$
 a) $\sqrt{2}/2$ b) 1/2 c) $\sqrt{3}/2$ d) $-\sqrt{2}/2$ e) $-\sqrt{3}/2$
12. Simplificar : $A = \left(\frac{\text{Sen}3x}{\text{Sen}x} - 1 \right) \text{Sen}30^\circ$
 a) Senx b) Cosx c) Sen2x d) Cos2x e) Tgx
13. Si : $3\text{Tag}x + \text{Ctg}x = 4$; además x es agudo
 Calcular : Sen3x
 a) $-\sqrt{2}/2$ b) $\sqrt{2}/2$ c) 1/2 d) $\sqrt{3}/2$ e) -1/2
14. Si : $2\text{Sen}3x = 3\text{Sen}x$. Calcular : Cos2x
 a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{10}$ d) $\frac{2}{5}$ e) 0,45
15. Si : $\text{Tag}3x = 37\text{Tag}x$. Calcular : $E = \frac{\text{Cos}x}{\text{Cos}3x}$
 a) 13/12 b) 12/13 c) 1/13 d) 5/13 e) 1/12

TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

I. DE SUMA A PRODUCTO (Factorización):

$$\text{Sen } A + \text{Sen } B = 2 \text{ Sen } \left(\frac{A+B}{2} \right) \text{ Cos } \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\text{Sen } A - \text{Sen } B = 2 \text{ Cos } \left(\frac{A+B}{2} \right) \text{ Sen } \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\text{Cos } A + \text{Cos } B = 2 \text{ Cos } \left(\frac{A+B}{2} \right) \text{ Cos } \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\text{Cos } B - \text{Cos } A = 2 \text{ Sen } \left(\frac{A+B}{2} \right) \text{ Sen } \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

Donde: $A > B$

Ejemplos:

1. Calcular: $W = \frac{\text{Sen}80^\circ - \text{Sen}40^\circ}{\text{Cos}40^\circ - \text{Cos}80^\circ} = \frac{2\text{Cos}60^\circ \cdot \text{Sen}20^\circ}{2\text{Sen}60^\circ \cdot \text{Sen}20^\circ} = \text{Ctg } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Simplificar:

$$E = \frac{\text{Cos}\alpha + m\text{Cos}2\alpha + \text{Cos}3\alpha}{\text{Sen}\alpha + m\text{Sen}2\alpha + \text{Sen}3\alpha} = \frac{2\text{Cos}2\alpha \cdot \text{Cos}\alpha + m\text{Cos}2\alpha}{2\text{Sen}2\alpha \cdot \text{Cos}\alpha + m\text{Sen}2\alpha} = \frac{\text{Cos}2\alpha \cdot (2\text{Cos}\alpha + m)}{\text{Sen}2\alpha \cdot (2\text{Cos}\alpha + m)} = \text{Ctg}2\alpha$$

3. Hallar "Tan $(\alpha + \beta)$ ", sabiendo que:

$$\text{Sen } 2\alpha + \text{Sen } 2\beta = m \quad \text{Cos } 2\alpha + \text{Cos } 2\beta = n$$

RESOLUCIÓN

$$\frac{2\text{Sen}(\alpha + \beta)\text{Cos}(\alpha - \beta)}{2\text{Cos}(\alpha + \beta)\text{Cos}(\alpha - \beta)} = \frac{m}{n} \Rightarrow \text{Tan } (\alpha + \beta) = \frac{m}{n}$$

SERIES TRIGONOMÉTRICAS

$$\text{Sen } (\alpha) + \text{Sen } (\alpha+r) + \text{Sen } (\alpha+2r) + \dots = \frac{\text{Sen}\left(n \cdot \frac{r}{2}\right)}{\text{Sen} \frac{r}{2}} \cdot \text{Sen}\left(\frac{1^\circ + u^\circ}{2}\right)$$

"n" \searrow s están en Progresión Aritmética

$$\cos(\alpha) + \cos(\alpha+r) + \cos(\alpha+2r) + \dots = \frac{\text{Sen}\left(n \cdot \frac{r}{2}\right)}{\text{Sen}\frac{r}{2}} \cdot \text{Cos}\left(\frac{1^\circ+u^\circ}{2}\right)$$

"n" términos están en Progresión Aritmética

Ejemplos:

1. Calcular: $M = \text{Sen}5^\circ + \text{Sen}10^\circ + \text{Sen}15^\circ + \dots + \text{Sen}355^\circ$

RESOLUCIÓN

$$M = \frac{\text{Sen}\left(n \cdot \frac{5^\circ}{2}\right) \cdot \text{Sen}\left(\frac{5^\circ+355^\circ}{2}\right)}{\text{Sen}\frac{5^\circ}{2}} = \frac{\text{Sen}\left(n \cdot \frac{5^\circ}{2}\right) \cdot \text{Sen}(180^\circ)}{\text{Sen}\frac{5^\circ}{2}} = 0$$

2. Reducir:

$$E = \frac{\text{Sen}4^\circ + \text{Sen}8^\circ + \text{Sen}12^\circ + \dots + \text{Sen}48^\circ}{\text{Cos}4^\circ + \text{Cos}8^\circ + \text{Cos}12^\circ + \dots + \text{Cos}48^\circ} = \frac{\text{Sen}(12 \cdot 2^\circ) \cdot \text{Sen}\left(\frac{4^\circ+48^\circ}{2}\right)}{\text{Sen}2^\circ} = \text{Tan}26^\circ$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Si se cumple: $\frac{\text{Sen}5x}{\text{Sen}3x} = \frac{5}{3}$ Calcular: $\frac{\text{Tan}4x}{\text{Tan}x}$

RESOLUCIÓN

$$\frac{\text{Sen}5x + \text{Sen}3x}{\text{Sen}5x - \text{Sen}3x} = \frac{5+3}{5-3} = \frac{2\text{Sen}4x \cdot \text{Cos}x}{2\text{Cos}4x \cdot \text{Sen}x} = \frac{8}{2} \Rightarrow \frac{\text{Tan}4x}{\text{Tan}x} = 4$$

2. Calcular la expresión: $E = \frac{1 + a\text{Sen}(x - y) + \text{Cos}(x - y)}{a + \text{Sen}(x - y) - a\text{Cos}(x - y)}$

Sabiendo:

$$\text{Sen}x - \text{Sen}y = m$$

$$\text{Cos}x + \text{Cos}y = n$$

RESOLUCIÓN

$$E = \frac{1 + \cos(x-y) + a \operatorname{Sen}(x-y)}{a[1 - \cos(x-y)] + \operatorname{Sen}(x-y)} \rightarrow E = \frac{2\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right) + a \cdot 2\operatorname{Sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{a\left[2\operatorname{Sen}^2\left(\frac{x-y}{2}\right)\right] + 2\operatorname{Sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)} =$$

$$E = \frac{2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + a\operatorname{Sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]}{2\operatorname{Sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\left[a\operatorname{Sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]} \rightarrow E = \operatorname{ctg}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Del dato: $\frac{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{Sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{m}{n} \rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{m}{n} \rightarrow \therefore \operatorname{ctg}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{n}{m}$

3. Hallar "P" = $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$

RESOLUCIÓN

$$P = \frac{\operatorname{Sen}\frac{3\pi}{7}}{\operatorname{Sen}\frac{\pi}{7}} \cdot \cos\left(\frac{2+6}{2}\right)\frac{\pi}{7} = \frac{\operatorname{Sen}\frac{3\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7}}{\operatorname{Sen}\frac{\pi}{7}} =$$

$$P = \frac{\left(-\operatorname{Sen}\frac{3\pi}{7} \cdot \cos\frac{3\pi}{7}\right) \cdot 2}{\left(\operatorname{Sen}\frac{\pi}{7}\right) \cdot 2} = \frac{-\operatorname{Sen}\frac{6\pi}{7}}{2\operatorname{Sen}\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{2}$$

4. Calcular "A" = $1\cos\frac{2\pi}{13} + 2\cos\frac{4\pi}{13} + 3\cos\frac{6\pi}{13} + \dots$
12 SUMANDOS

RESOLUCIÓN

$$A = 12\cos\frac{24\pi}{13} + 11\cos\frac{22\pi}{13} + 10\cos\frac{20\pi}{13} + \dots + 1\cos\frac{2\pi}{13}$$

$$2^a = 13\cos\frac{2\pi}{13} + 13\cos\frac{4\pi}{13} + 13\cos\frac{6\pi}{13} + \dots + 13\cos\frac{24\pi}{13}$$

$$2^a = 13 \left[\frac{\text{Sen}\frac{12\pi}{13}}{\text{Sen}\frac{\pi}{13}} \cdot \text{Cos}\pi \right] \Rightarrow 2A = -13$$

$$\underline{A = \frac{-13}{2} = -6,5}$$

- Fórmulas para degradar

Fórmula General: $2^{n-1} \text{Cos}^n x$

$$2^3 \text{Cos}^4 x = \binom{4}{0} \text{Cos} 4x + \binom{4}{1} \text{Cos} 2x + \frac{1}{2} \binom{4}{2} \leftarrow \text{T. INDEPENDIENTE}$$

$$2^5 \text{Cos}^6 x = \binom{6}{0} \text{Cos} 6x + \binom{6}{1} \text{Cos} 4x + \frac{1}{2} \binom{6}{2} \text{Cos} 2x + \frac{1}{2} \binom{6}{3}$$

$$2^4 \text{Cos}^5 x = \binom{5}{0} \text{Cos} 5x + \binom{5}{1} \text{Cos} 3x + \binom{5}{2} \text{Cos} x$$

$$= \text{Cos} 5x + 5 \text{Cos} 3x + 10 \text{Cos} x$$

II. DE PRODUCTO A SUMA O DIFERENCIA:-

$$2\text{Sen} x \cdot \text{Cos} y = \text{Sen}(x+y) + \text{Sen}(x-y)$$

$$2\text{Cos} x \cdot \text{Sen} y = \text{Sen}(x+y) - \text{Sen}(x-y)$$

$$2\text{Cos} x \cdot \text{Cos} y = \text{Cos}(x+y) + \text{Cos}(x-y)$$

$$2\text{Sen} x \cdot \text{Sen} y = \text{Cos}(x-y) - \text{Cos}(x+y)$$

Donde $x > y$

Ejemplos:

1. Reducir: $E = \frac{2\text{Sen}4x\text{Cos}3x - \text{Sen}x}{2\text{Cos}5x\text{Sen}2x + \text{Sen}3x}$

RESOLUCIÓN

$$E = \frac{\text{Sen}7x + \text{Sen}x - \text{Sen}x}{\text{Sen}7x - \text{Sen}3x + \text{Sen}3x} = 1$$

2. Calcular: $E = \frac{\text{Sen}7x}{\text{Sen}x} - 2\text{Cos}2x - 2\text{Cos}4x - 2\text{Cos}6x$

$$E = \frac{\text{Sen}7x - 2\text{Cos}2x\text{Sen}x - 2\text{Cos}4x\text{Sen}x - 2\text{Cos}6x\text{Sen}x}{\text{Sen}x}$$

$$= \frac{\text{Sen}7x - (\text{Sen}3x - \text{Sen}x) - (\text{Sen}5x - \text{Sen}3x) - 1(\text{Sen}7x - \text{Sen}5x)}{\text{Sen}x}$$

$$= \frac{\text{Sen}x}{\text{Sen}x} = 1$$

3. Hallar $P = \frac{\text{Sen}7x\text{Sen}5x + \text{Sen}14x\text{Sen}2x}{\text{Sen}9x\text{Sen}7x}$

RESOLUCIÓN

$$P = \frac{\frac{1}{2}\{\text{Cos}2x - \text{Cos}12x\} + \frac{1}{2}\{\text{Cos}12x - \text{Cos}16x\}}{\frac{1}{2}\{\text{Cos}2x - \text{Cos}16x\}} \rightarrow P = 1$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Reducir: $R = \frac{\text{Sen}3x\text{Sen}x + \text{Sen}9x\text{Sen}5x + \text{Sen}6x.\text{Sen}2x}{\text{Cos}4x\text{Sen}2x + \text{Cos}7x.\text{Sen}x + \text{Cos}13x\text{Sen}5x}$

RESOLUCIÓN

$$R = \frac{2\text{Sen}3x\text{Sen}x + 2\text{Sen}9x\text{Sen}5x + 2\text{Sen}6x.\text{Sen}2x}{2\text{Cos}4x\text{Sen}2x + 2\text{Cos}7x.\text{Sen}x + 2\text{Cos}13x\text{Sen}5x}$$

$$R = \frac{\text{Cos}2x - \text{Cos}4x + \text{Cos}4x - \text{Cos}14x + \text{Cos}14x - \text{Cos}18x}{\text{Sen}6x - \text{Sen}2x + \text{Sen}8x - \text{Sen}6x + \text{Sen}18x - \text{Sen}8x}$$

$$R = \frac{\text{Cos}2x - \text{Cos}18x}{\text{Sen}18x - 2\text{Sen}2x} = \frac{2\text{Sen}10x\text{Sen}8x}{2\text{Cos}10x.\text{Sen}8x} = \frac{\text{Sen}10x}{\text{Cos}10x}$$

$$R = \text{Tg}10x$$

2. Calcular: $P = \text{Sen}^2 10^\circ + \text{Cos}^2 20^\circ - \text{Sen}10\text{Cos}20^\circ$

RESOLUCIÓN

$$2P = 2\text{Sen}^2 10^\circ + 2\text{Cos}^2 20^\circ - 2\text{Sen}10\text{Cos}20^\circ$$

$$2P = 1 - \text{Cos}20^\circ + 1 + \text{Cos}40^\circ - (\text{Sen}30^\circ - \text{Sen}10^\circ)$$

$$2P = 2 + \text{Cos}40^\circ - \text{Cos}20^\circ - \frac{1}{2} + \text{Sen}10^\circ$$

$$2P = \frac{3}{2} + \text{Cos}40^\circ - \text{Cos}20^\circ + \text{Sen}10^\circ$$

$$2P = \frac{3}{2} - 2\text{Sen}30^\circ . \text{Sen}10^\circ + \text{Sen}10^\circ$$

$$P = \frac{3}{4}$$

EJERCICIOS

1. Transformar a producto :

$$R = \text{Sen}70^\circ + \text{Cos}70^\circ$$

- a) $\sqrt{2} \text{Cos}25^\circ$ b) $\sqrt{2} \text{Sen}25^\circ$
 c) $\sqrt{2} \text{Sen}20^\circ$ d) $\sqrt{2} \text{Cos}20^\circ$ e) 1

2. Reducir : $M = \frac{\text{Cos}11x - \text{Cos}7x}{\text{Sen}11x - \text{Sen}7x}$

- a) 2Sen^2x b) 2Cos^2x
 c) $-\text{Tag}9x$ d) $2\text{Sen}3x$
 e) 2Sen^2x

3. Si : $a + b = 60^\circ$.

$$\text{Hallar : } E = \frac{\text{Sen}a + \text{Sen}b}{\text{Cos}a + \text{Cos}b}$$

- a) $\sqrt{2}/3$ b) $\sqrt{2}/2$ c) $1/2$
 d) $\sqrt{3}/3$ e) $\sqrt{3}$

4. Reducir :

$$E = 4(\text{Cos}5x + \text{Cos}3x)(\text{Sen}3x - \text{Sen}x)$$

- a) $2\text{Sen}4x$ b) $2\text{Cos}8x$
 c) $2\text{Sen}8x$ d) $2\text{Cos}4x$
 e) $2\text{Sen}4x \cdot \text{Cos}4x$

5. Hallar el valor de " M " :

$$M = \text{Sen}85^\circ - \text{Cos}5^\circ - \text{Sen}25^\circ - \text{Cos}115^\circ$$

- a) 0 b) - 0.5 c) 0.5
 d) - 1 e) 3

6. Reducir :

$$R = (\text{Tag}2\theta + \text{Tag}4\theta)(\text{Cos}2\theta + \text{Cos}6\theta)$$

- a) $\text{Sen}2\theta$ b) $\text{Sen}6\theta$ c) $2\text{Sen}2\theta$
 d) $\text{Sen}12\theta$ e) $2\text{Sen}6\theta$

7. Reducir :

$$E = \frac{\text{Cos}4x + \text{Cos}2x + \text{Cos}x}{\text{Sen}2x(1 + 2\text{Cos}3x)}$$

- a) $\frac{1}{2}\text{Csc}x$ b) $\text{Csc}x$ c) $\text{Csc}2x$
 d) $\text{Cos}x$ e) $\text{Sec}x$

8. Reducir :

$$A = \frac{\text{Sen}3x + \text{Sen}6x + \text{Sen}9x}{\text{Cos}3x + \text{Cos}6x + \text{Cos}9x} \text{ si } x=5^\circ$$

- a) $\sqrt{3}/3$ b) $\sqrt{3}/2$ c) $\sqrt{2}/2$
 d) $\sqrt{3}$ e) 1

9. Reducir .

$$E = \frac{\text{Sen}x + \text{Sen}3x + \text{Sen}5x + \text{Sen}7x}{\text{Cos}x + \text{Cos}3x + \text{Cos}5x + \text{Cos}7x}$$

- a) $\text{Tag}x$ b) $\text{Tag}2x$ c) $\text{Tag}3x$
 d) $\text{Tag}6x$ e) $\text{Tag}4x$

10. Al factorizar :

$$\text{Cos}8x + \text{Cos}2x + \text{Cos}6x + \text{Cos}4x$$

Indicar un factor :

- a) $\text{Sen}x$ b) $\text{Cos}3x$ c) $\text{Cos}5x$
 d) $\text{Sen}5x$ e) $\text{Sen}2x$

11. Expresar como producto :

$$E = \text{Cos}^24x - \text{Sen}^26x$$

- a) $\text{Cos}4x \cdot \text{Cos}6x$
 b) $\text{Cos}2x \cdot \text{Cos}10x$
 c) $2\text{Cos}4x \cdot \text{Cos}6x$
 d) $2\text{Cos}2x \cdot \text{Cos}10x$
 e) $4\text{Cos}2x \cdot \text{Cos}10x$

12. Hallar el valor de "n" para que la igualdad :

$$\frac{\text{Sen}5\theta + \text{Sen}\theta}{\text{Cos}5\theta - \text{Cos}\theta} + \frac{\text{Sen}5\theta - \text{Sen}\theta}{\text{Cos}5\theta + \text{Cos}\theta} - n \left(\frac{\text{Sen}10\theta + \text{Sen}2\theta}{\text{Cos}10\theta - \text{Cos}2\theta} \right)$$

Siempre sea nula.

- a) 1 b) -2 c) 2
 d) 1/2 e) -1

13. Reducir :

$$E = \frac{\text{Cos}50^\circ}{2\text{Sen}70^\circ - \text{Sen}50^\circ}$$

- a) $\sqrt{3}/3$ b) $\sqrt{3}/6$ c) 1
 d) $\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{3}/3$

14. Si : $21\theta = \pi$. Hallar el valor de :

$$R = \frac{\text{Sen}23x - \text{Sen}7x}{\text{Sen}14x + \text{Sen}2x}$$

- a) 2 b) - 2 c) 1
 d) - 1 e) 1/2

15. Hallar el valor de " E " :

$$E = \text{Cos}^2 20^\circ + \text{Cos}^2 100^\circ + \text{Cos}^2 140^\circ$$

- a) 1 b) 3/2 c) 2
 d) 5/2 e) 3

16. Factorizar :

$$E = \text{Ctg}30^\circ + \text{Ctg}40^\circ + \text{Ctg}50^\circ + \text{Ctg}60^\circ$$

- a) $2\sqrt{3} \text{Cos}20^\circ$
 b) $4\sqrt{3}/3 \text{Cos}50^\circ$
 c) $2\sqrt{3}/3 \text{Sen}70^\circ$
 d) $8\sqrt{3}/3 \text{Cos}70^\circ$
 e) $10\sqrt{3}/3 \text{Sen}70^\circ$

17. Reducir :

$$E = 2\text{Cos}3x \cdot \text{Cos}x - \text{Cos}2x$$

- a) $\text{Cos}2x$ b) $\text{Cos}3x$ c) $\text{Cos}4x$
 d) $\text{Sen}4x$ e) $\text{Sen}2x$

18. Reducir :

$$M = 2\text{Sen}80^\circ \cdot \text{Cos}50^\circ - \text{Sen}50^\circ$$

- a) 1 b) 1/2 c) $\sqrt{3}$
 d) $\sqrt{3}/2$ e) $\sqrt{3}/4$

19. Reducir :

$$R = 2\text{Cos}4\theta \cdot \text{Csc}6\theta - \text{Csc}2\theta$$

- a) - $\text{Csc}3\theta$ b) - $\text{Csc}4\theta$ c) $\text{Csc}6\theta$
 d) - $\text{Ctg}4\theta$ e) - $\text{Tag}4\theta$

20. Si: $\text{Sen}2x \cdot \text{Sen}5x = \text{Sen}x \cdot \text{Cos}4x - \text{Cos}x \cdot \text{Cos}6x$
 Hallar : " $\text{Ctg}x$ "

- a) 1 b) 1/2 c) 1/4
 d) 4 e) 2

21. Transformar :

$$R = 2\text{Cos}3x \cdot \text{Sen}x + 2\text{Cos}5x \cdot \text{Sen}x + 2\text{Cos}7x \cdot \text{Sen}x - 2\text{Sen}4x \cdot \text{Cos}4x$$

- a) $\text{Sen}6x$ b) $\text{Cos}6x$ c) - $\text{Sen}4x$
 d) - $\text{Cos}4x$ e) - $\text{Sen}2x$

22. Simplificar :

$$R = \text{Sen}5x \cdot \text{Sen}x + \text{Cos}7x \cdot \text{Cos}x$$

- a) $2\text{Cos}x \cdot \text{Cos}6x$
 b) $2\text{Sen}2x \cdot \text{Sen}6x$
 c) $2\text{Sen}2x \cdot \text{Cos}6x$
 d) $\text{Cos}2x \cdot \text{Cos}6x$
 e) $\text{Sen}2x \cdot \text{Sen}6x$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

* OBJETIVOS

De lo que se trata es de calcular de manera única un valor para el arco (ángulo), conociendo para ello el valor de la función trigonométrica que lo afecta. En otro tipo de problemas un artificio útil será hacer un cambio de variable a la función trigonométrica inversa.

$$\text{Si } \text{Sen} \alpha = 1/2 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \dots$$

α es un arco cuyo seno vale $1/2$

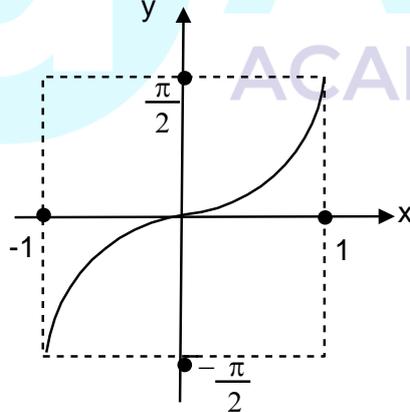
$$\alpha = \text{arc Sen } (1/2) = \text{Sen}^{-1} 1/2$$

$$\text{arc Sen } (1/2) = \frac{\pi}{6}$$

$$\rightarrow \text{Si } \text{Tg } \alpha = 1/2 \\ \text{arc tg } (1/2) = \alpha$$

* DEFINICIONES

i) $y = \text{arc Sen } x \quad x \in [-1, 1]$
 un arco cuyo seno es "x" $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



Ejemplo:

$$\text{Arc Sen } \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Arc Sen } \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

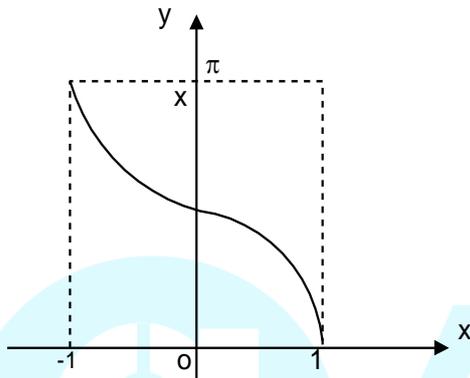
$$\text{Arc Sen } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Arc Sen} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Arc Sen} (-x) = \text{Arc Sen } x$$

$$\text{ii) } y = \text{arc Cos } x \quad x \in [-1, 1]$$

$$\text{un arco cuyo coseno es } x \quad y \in [0, \pi]$$



Ejemplo:

$$\text{Arc Cos} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{6}$$

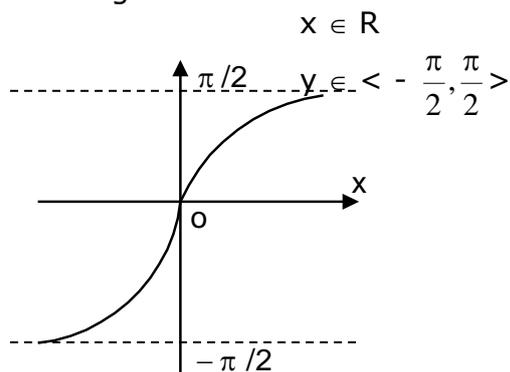
$$\text{Arc Cos} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Arc Cos} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{Arc Cos} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Arc Cos} (-x) = \pi - \text{arc Cos } x$$

iii) $y = \text{arc tg } x$



Ejemplo:

$$\text{Arc Tg } (1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Arc Tg } (2 - \sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{Arc tg } (-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Arc tg } (\sqrt{3} - 2) = -\frac{\pi}{12}$$

$$\text{Arc tg } (-x) = -\text{Arc tg } x$$

iv) $y = \text{arc ctg } (x)$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$y \in \langle 0, \pi \rangle$$

$$\text{arc ctg. } (3/4) = 53^\circ$$

$$\text{arc ctg. } (-3/4) = 180^\circ - 53^\circ = 127^\circ$$

*** PROPIEDADES**

1. La función directa anula a su inversa

$$\text{Sen } (\text{arc Sen } x) = x$$

$$\text{Cos } (\text{arc Cos } x) = x$$

$$\text{Tg } (\text{arc Tg } x) = x$$

$$\text{Ejm: Sen } \left(\text{arc Sen } \frac{2}{5} \right) = \frac{2}{5}$$

$$\text{Cos } \left(\text{arc Cos } \frac{11}{10} \right) = \frac{11}{10}$$

$$\text{Tg } (\text{arc Ctg } 1996) = 1996$$

2. La función inversa anula a su función directa

$$\begin{aligned} \text{Arc Sen (Sen } x) &= x \\ \text{Arc Cos (Cos } x) &= x \\ \text{Arc Tg (Tg } x) &= x \end{aligned}$$

Ejm: $\text{Arc Cos (Cos } \frac{4\pi}{5}) = \frac{4\pi}{5}$

$$\text{Arc Sen (Sen } \frac{4\pi}{5}) = \text{Arc Sen (Sen } \frac{\pi}{5}) = \frac{\pi}{5}$$

3. Expresiones equivalentes

Si:

$$\text{Sen } \alpha = n \quad \text{Csc } \alpha = 1/n$$

$$\alpha = \text{arc sen } (n)\alpha = \text{arc Csc } \left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{arc Sen } (n) = \text{Arc Csc } \left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{Arc Cos } (n) = \text{arc Sec } \left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{Arc Tg } (n) = \text{arc Ctg } \left(\frac{1}{n}\right) ; n > 0$$

$$\text{Arc Tg } (n) = \text{arc Ctg } \left(\frac{1}{n}\right) - \pi ; n > 0$$

4. Fórmula Inversa

$$\text{Arc tg } x + \text{Arc } y = \text{arc tg } \left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + n \pi$$

- | | | |
|------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|
| i) $xy < 1$
$n = 0$ | ii) $xy < 1$
$x > 0$
$n = 1$ | iii) $xy > 1$
$x < 0$
$n = -1$ |
|------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|

Ejemplo:

$$E = \text{Arc tg } (2) + \text{Arc tg } (3) \quad xy > 1$$

$$X > 0$$

$$n = 1$$

RESOLUCIÓN

$$E = \text{Arc tg} \left(\frac{2+3}{1-2 \times 3} \right) + \pi$$

$$E = \text{Arc tg} (-1) + \pi = \frac{-\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

NOTA

* Además: $\text{arc tg} x - \text{arc tg} y = \text{arc tg} \left(\frac{x-y}{1+xy} \right)$

$$2 \text{arc tg} x = \text{arc tg} \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)$$

$$3 \text{arc tg} x = \text{arc tg} \left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2} \right)$$

EJERCICIOS

1. $2b = 3c \text{ Sen } k\theta$; Despejar "θ"

RESOLUCIÓN

$$\frac{2b}{3c} = \text{Sen} k\theta$$

$$\text{Arc Sen} \left(\frac{2b}{3c} \right) = k\theta \rightarrow \theta = \frac{1}{k} \text{arc Sen} \left(\frac{2b}{3c} \right)$$

2. $a = b \text{ Cos} (k\theta + d)$, Despejar "θ"

RESOLUCIÓN

$$\frac{a}{b} = \text{Cos} (k\theta + d),$$

$$\text{Arc cos} \left(\frac{a}{b} \right) = k\theta + d \rightarrow \theta = \frac{1}{k} \left[\text{arc cos} \left(\frac{a}{b} \right) - d \right]$$

3. HALLAR:

$$P = \text{arc Sen} (\sqrt{2}/2) + \text{arc Cos} (-1/2) + \text{arc Tg} (2-\sqrt{3})$$

RESOLUCIÓN

$$P = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{12} = \frac{-3\pi + 8\pi + \pi}{12} = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$$

4. HALLAR: $Q = \text{arc Cos}1 + \text{arc Sen} (-1) + \text{arc Cos} (-1)$

RESOLUCIÓN

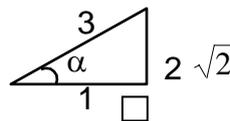
$$Q = 0 + \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \pi = \frac{\pi}{2}$$

5. HALLAR:

$$R = \text{Sen} (\text{arc Cos } 1/3)$$

RESOLUCIÓN

$$\alpha = \text{arc Cos } 1/3 \rightarrow \text{Cos}\alpha = 1/3 \rightarrow$$



$$\text{Sen } \alpha = \text{¿??}$$

$$\text{Sen}\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

6. $S = \text{Sec}^2 (\text{arcTg}3) + \text{Csc}^2 (\text{ar Ctg } 4)$

$$\alpha \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\beta}$$

RESOLUCIÓN

Tenemos $\rightarrow \text{Tg}\alpha = 3 \qquad \text{Ctg } \beta = 4$

Piden:

$$S = 1 + \underbrace{\text{Tg}^2\alpha}_{\text{Sec}^2\alpha} + 1 + \underbrace{\text{Ctg}^2\beta}_{\text{Csc}^2\beta}$$

$$\text{Sec}^2\alpha + \text{Csc}^2\beta = 27$$



7. $T = \text{Cos} (2 \text{ Arc Cos } \frac{\sqrt{2}}{5})$

RESOLUCIÓN

$$\text{Cos } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

Piden $T = \text{Cos } 2\alpha = 2\text{Cos}^2\alpha - 1$

$$T = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2 - 1 = \frac{-21}{25}$$

8. $Y = \text{arc Sen } 1/3 + \text{arc Cos } 1/3$

$$\alpha \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\beta}$$

RESOLUCIÓN

Tenemos: $\text{Sen}\alpha = \frac{1}{3} \qquad \text{Cos } \beta = \frac{1}{3}$

$$\text{Sen}\alpha = \text{Cos}\beta \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

Propiedad:

$$\text{arc sen } x + \text{arc Cos } x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{arc Tg } x + \text{arc Ctg } x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{arc Sec } x + \text{arc Csc } x = \frac{\pi}{2}$$

9. $2 \text{ arc Sen } x = \text{arc Cos } x$. Hallar x

RESOLUCIÓN

$$\text{Se sabe que: } \text{arc Cos } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc Sen } x$$

$$3 \text{ arc Sen } x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{arc Sen } x = \frac{\pi}{6}$$

$$x = \text{Sen } \frac{\pi}{6} \rightarrow x = 1/2$$

10. Dado : $\text{arc Sen } x + \text{arc Tg } y = \pi/5$
Hallar : $\text{arc Cos } x + \text{arc Ctg } y = z$

RESOLUCIÓN

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = z + \frac{\pi}{5} \quad z = \frac{4\pi}{5}$$

EJERCICIOS

1. Calcular: $B = 2(\text{arcos}0 - \text{arcsec}2)$

a) π b) $\pi/2$ c) $\pi/3$ d) $\pi/4$ e) $\pi/6$

2. Calcular: $A = \text{arcsen} \frac{1}{2} + \text{arctan } 1$

a) $\pi/12$ b) $\pi/6$ c) $\pi/3$ d) $5\pi/12$ e) $2\pi/3$

3. Cual de las expresiones no es equivalente a: $E = \text{arcsen} \frac{1}{2}$

a) $\text{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\text{arcos} \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{1}{2} \text{ arccos} \frac{1}{2}$ d) $\text{arcsec}2$ e) $2 \text{ arctg}(2 - \sqrt{3})$

4. Hallar el equivalente de: $\arcsen \frac{1}{x}$

- a) $\text{arctg} \sqrt{x^2 + 1}$ b) $\text{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ c) $\text{arctg} \sqrt{x^2 - 1}$ d) $\text{arctg} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$ e) $\text{arctg} \frac{\sqrt{x + 1}}{x^2}$

5. Calcular:

$$A = 4\cos(\text{arctg} \sqrt{3} - \text{arcsec} \sqrt{2})$$

- a) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ b) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ c) $\sqrt{3} + 1$ d) $\sqrt{3} - 1$ e) $2\sqrt{3}$

6. Afirmar si (V) 0 (F)

I. $\text{arsen} \left(-\frac{1}{2} \right) = \text{arcsen} \left(\frac{1}{2} \right)$

II. $\text{arctg} \left(\frac{1}{3} \right) = \text{arcctg} 3$

III. $\text{arcsen} \frac{\sqrt{3}}{5} = \text{arccsc} \frac{5\sqrt{3}}{3}$

- a) VVF b) VFV c) FVV d) VVV e) FVF

7. Calcular: $A = \arcsen \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2}$

- a) 30° b) 45° c) 60° d) 75° e) 90°

8. Calcule: $A = \arcsen \frac{2}{7} + \text{arctg} \sqrt{3} + \arccos \frac{2}{7}$

- a) 105° b) 120° c) 135° d) 150° e) 165°

9. Calcular: $A = 3\text{csc} \left[\arccos(\text{sen}(\text{arctg} \sqrt{3})) \right]$

- a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}/3$ c) 6 d) $3/5$ e) $2/3$

10. Si: $\text{arcsen} x + \text{arcsen} y + \text{arcsen} z = \frac{\pi}{4}$

además: $-1 \leq x; y; z \leq 1$

Calcular: $E = \arccos x + \arccos y + \arccos z$

- a) $2\pi/3$ b) 2π c) $3\pi/4$ d) $5\pi/4$ e) 3π

11. Calcular: $\text{sen} \left(\frac{1}{2} \text{arcsec} 2 \right) + \left(\frac{5}{2} \text{arccsc}(\sqrt{5} + 1) \right)$

- a) $1/2$ b) 1 c) $3/2$ d) 2 e) $5/2$

12. Simplificar: $A = \text{Cos} \left[\text{arctg}(\sqrt{3} \text{sec}(\text{arcctg} \sqrt{3})) \right]$

- a) $\sqrt{2}/2$ b) $\sqrt{3}/2$ c) $1/2$ d) $\sqrt{5}/5$ e) $\sqrt{6}/6$

13. Calcular: $A = 2\arccos(-1) + \frac{1}{2} \arcsen \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

- a) $7\pi/8$ b) $11\pi/8$ c) $13\pi/8$ d) $15\pi/8$ e) $17\pi/8$

14. Simplificar: $B = \operatorname{arctg}2 - \arccos\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{arctg}2$

- a) $\pi/2$ b) $\pi/3$ c) $\pi/4$ d) $\pi/5$ e) $\pi/6$

15. Calcular: $A = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsec}\sqrt{2} + \operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

- a) $\frac{x}{x+1}$ b) $\frac{x}{x-1}$ c) $\frac{1+x}{1-x}$ d) $\frac{x+1}{x-1}$ e) $\frac{x+1}{x}$

16. Calcular: $A = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}3\right)$

- a) $1/2$ b) $1/3$ c) $1/4$ d) $1/5$ e) $1/6$

17. Calcular: $N = \cos\left[4\left(\operatorname{arcsec}\frac{2\sqrt{3}}{3} + \operatorname{arcsen}\frac{1}{2}\right)\right]$

- a) 1 b) -1 c) $1/3$ d) $-1/2$ e) $1/6$

18. Simplificar $A = \operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arcsen}\frac{5}{13}\right)$

- a) $36/17$ b) $56/65$ c) $71/17$ d) $91/19$ e) $41/14$

19. Evaluar: $A = \operatorname{arctg}\frac{1}{6} + \operatorname{arctg}\frac{5}{7}$

- a) $\pi/6$ b) $\pi/3$ c) $\pi/4$ d) $\pi/8$ e) $\pi/12$

20. Evaluar: $B = \operatorname{arctg}5 - \operatorname{arctg}3 + \operatorname{arctg}\frac{7}{9}$

- a) $\pi/5$ b) $2\pi/5$ c) $\pi/4$ d) $\pi/3$ e) $\pi/6$

21. Calcular: $M = \arccos\frac{4}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{10}}$

- a) 60° b) 37° c) 72° d) 82° e) 94°

22. Calcular: $P = \operatorname{sen}\left(\arccos\frac{4}{5}\right) + 2\operatorname{sec}\left(\operatorname{arctg}\frac{12}{5}\right) + 4\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{7}{25}\right)$

- a) $241/25$ b) $13/125$ c) $31/5$ d) $241/5$ e) $31/125$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

CONCEPTO: Expresión general de los arcos que tienen una misma función trigonométrica.

1. En el caso de las funciones trigonométricas Seno y Csc usaremos

$$\theta_G = n \pi + (-1)^n \theta_p$$

Donde:

θ_G = Exp. General de los arcos (ángulos)

n = N° entero

θ_p = Valor principal del arco para calcular θ_p usaremos el rango del arco Seno.

2. En el caso de las funciones trigonométricas Cos y Sec usaremos:

$$\theta_G = 2 n \pi \pm \theta_p$$

Para calcular el valor principal del arco (θ_p) usaremos el rango del arco Cos.

3. En el caso de las funciones trigonométricas tg y Ctg usaremos.

$$\theta_G = n \pi + \theta_p$$

Para calcular el valor principal del arco usaremos el rango del arco tg, o arco Ctg.

ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA

Son igualdades entre las funciones trigonométricas de una cierta variable (una sola incógnita), dichas igualdades se satisfacen solamente para algunos valores que puede tomar la función trigonométrica, es decir deberá estar definida en dicho valor (la ecuación trigonométrica puede tener 2 o más incógnitas)

A los valores que cumplen con la ecuación trigonométrica se les conoce como soluciones o raíces.

Ejemplo de como obtener las soluciones de una ecuación trigonométrica:

Resolver: $\text{Sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\theta_G \quad \theta_p = \text{arc Sen} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \rightarrow \theta_p = \frac{\pi}{3}$$

$$\rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3} \quad \text{SOLUCION GENERAL}$$

Si $n = 0$ $x = \frac{\pi}{3}$ SOLUCION PRINCIPAL

$n = 1$ $x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

SOLUCIONES PARTICULARES

$n = 2$ $x = 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$

2. Resolver: $\text{Cos } 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\theta_G} \rightarrow \theta_P = \text{arc Cos} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \rightarrow \theta_P = \frac{3\pi}{4}$

$2x = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4}$

$x = n\pi \pm \frac{3\pi}{8}$ SOLUCION GENERAL

Si $n = 0$ $x = \frac{3\pi}{8}$ SOLUCION PRINCIPAL

$x = -\frac{3\pi}{8}$

$n = 1$ $x = \pi + \frac{3\pi}{8} = \frac{11\pi}{8}$

SOLUCIONES PARTICULARES

$x = \pi - \frac{3\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$

3. Resolver:

$\text{Tg} \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{3}$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\theta_G} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\theta_P}$

$\theta_G \theta_P = \frac{\pi}{3}$

$3x + \frac{\pi}{4} = n\pi + \frac{\pi}{3}$

$3x = n\pi + \frac{\pi}{12}$

$x = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{36}$

EJERCICIOS RESUELTOS

$$1. 2\text{Sen}x - \text{Csc}x = 1$$

RESOLUCIÓN

$$2\text{Sen}x - \frac{1}{\text{Sen}x} = 1$$

$$2\text{Sen}^2x - \text{Sen}x - 1 = 0$$

$$2\text{Sen}x = 1$$

$$\text{Sen}x = -1$$

$$(2\text{Sen}x + 1)(\text{Sen}x - 1) = 0$$

$$i) \text{Sen}x = -\frac{1}{2}$$

$$x = n\pi + (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$x = n\pi - (-1)^n \left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$ii) \text{Sen}x = 1$$

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$$

$$2 \text{ Sen}^2x = \frac{3(1 - \text{Cos}x)}{2}$$

RESOLUCIÓN

$$(1 - \text{Cos}x)(1 + \text{Cos}x) = \frac{3(1 - \text{Cos}x)}{2}$$

Queda:

$$1 + \text{Cos}x = 3/2$$

$$\text{Cos}x = 1/2$$

$$x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Pero} \rightarrow 1 - \text{Cos}x = 0$$

$$\text{Cos}x = 1$$

$$x = 2n\pi$$

$$3. \text{Sen}x - \sqrt{3} \text{Cos}x = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2} \text{Sen}x - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{Cos}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Sen}x \cdot \text{Cos} \frac{\pi}{3} - \text{Cos}x \cdot \text{Sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Sen} \left(\underbrace{x - \frac{\pi}{3}}_{\theta_G} \right) = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\theta_P = \frac{\pi}{4}}$$

$$x - \frac{\pi}{3} = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$$

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$$

i) $n = 2k$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{7\pi}{12}$$

ii) $n = 2k + 1$

$$x = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{13\pi}{12}$$

4. $2\cos 2x - \sin 3x = 2$

RESOLUCIÓN

$$2(1 - 2\sin^2 x) - (3\sin x - 4\sin 3x) = 2$$

$$4\sin^2 x - 4\sin^2 x - 3\sin x = 0$$

$$\sin x (4\sin^2 x - 4\sin x - 3) = 0$$

$$\sin x (2\sin x - 3)(2\sin x + 1) = 0$$

i) $\sin x = 0$

$$x = n\pi$$

ii) $\sin x = -\frac{1}{2}$

$$x = n\pi - (-1)^n \frac{\pi}{6}$$

iii) $\sin x = \frac{3}{2} \rightarrow$ ABSURDO

5. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

RESOLUCIÓN

$$2\sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x = 2\cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x$$

$$\sin 2x (2\cos x + 1) = \cos 2x (2\cos x + 1)$$

Queda:

$$\sin 2x = \cos 2x$$

$$\text{Tg } 2x = 1$$

$$\theta_G \quad \theta_p = \frac{\pi}{4}$$

$$2x = n\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

Pero $\rightarrow 2\cos x + 1 = 0$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\theta_G \quad \theta_p = \frac{\pi}{4}$$

$$x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

6. $4\sin^2 x - 3 = 0$

Siendo $0 \leq x \leq 2\pi$

RESOLUCIÓN

$$\text{Sen}^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\text{Sen} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{i) Sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{IQ} \rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{IIQ} \rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{IIIQ} \rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{IVQ} \rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{IIIQ} \rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \\ \text{IVQ} \rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \end{array} \right\} \text{Sol: Sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

7. La suma de soluciones de la ecuación

$$\text{Cos} 2x + \text{Sen}^2 \frac{x}{2} - \text{Cos}^2 \frac{x}{2} = 0 ; \text{ Si: } 0 \leq x \leq \pi \text{ es:}$$

RESOLUCIÓN

$$\text{Cos} 2x - (\text{Cos}^2 \frac{x}{2} - \text{Sen}^2 \frac{x}{2}) = 0$$

$$2\text{Cos}^2 x - 1 - \text{Cos} x = 0$$

$$2\text{Cos}^2 x - \text{Cos} x - 1 = 0$$

$$(2\text{Cos} x + 1)(\text{Cos} x - 1) = 0$$

$$\text{i) } 2\text{Cos} x + 1 = 0 \rightarrow \text{Cos} x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{IIQ} \rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{IVQ} \rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ no es solución}$$

$$\text{ii) } \text{Cos} x = 1$$

$$x = 0, 2\pi. \text{ "2 } \pi \text{" no es solución}$$

$$\text{Suma} = \frac{2\pi}{3} + 0 = \frac{2\pi}{3}$$

8. $4\text{Cos}^2 2x + 8\text{Cos}^2 x = 7$, si $x \in [0, 2\pi]$

RESOLUCIÓN

$$4\cos^2 2x + 4 \times \underbrace{2\cos^2 x}_{(1+\cos 2x)} = 7$$

$$4\cos^2 2x + 4\cos 2x - 3 = 0$$

$$(2\cos 2x + 3)(2\cos 2x - 1) = 0$$

$$\text{i) } \cos 2x = -\frac{3}{2} \text{ No existe}$$

$$\text{ii) } \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\text{IQ: } 2x = \frac{\pi}{3} \quad x = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{IVQ: } 2x = 2\pi - \frac{\pi}{3} \quad x = \frac{5\pi}{6}$$

9. Dar la menor solución positiva de:

$$\text{Tgx} = \text{Tg} \left(x + \frac{\pi}{18} \right) \text{Tg} \left(x + \frac{\pi}{9} \right) \text{Tg} \left(x + \frac{\pi}{16} \right)$$

RESOLUCIÓN

$$\text{Tgx} = \text{Tg} (x+10^\circ) \cdot \text{Tg} (x+20^\circ) \cdot \text{Tg} (x+30^\circ)$$

$$\frac{\text{Tgx}}{\text{Tg}(x+30^\circ)} = \text{Tg} (x+10^\circ) \text{Tg} (x+20^\circ)$$

$$\frac{\text{Sen } x \text{ Cos}(x+30^\circ)}{\text{Cos } x \text{ Sen}(x+30^\circ)} = \frac{\text{Sen}(x+10^\circ)\text{Sen}(x+20^\circ)}{\text{Cos}(x+10^\circ) \text{Cos}(x+20^\circ)}$$

Proporciones

$$\frac{\text{Sen}(x+x+30^\circ)}{\text{Sen}(x-x-30^\circ)} = \frac{\text{Cos}(x+10^\circ-x-20^\circ)}{-\text{Cos}(x+10^\circ+x+20^\circ)}$$

$$2\text{Sen}(2x+30^\circ)\text{Cos}(2x+30^\circ) = 2\text{Sen}30^\circ \text{Cos}10^\circ$$

$$\text{Sen} (4x + 60) = \text{Cos } 10^\circ$$

$$4x + 60^\circ + 10^\circ = 90^\circ$$

$$x = 5^\circ$$

EJERCICIOS

1. Resolver $\text{Cos}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x \in [0 ; 2\pi]$

a) $3\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}$ b) $5\frac{\pi}{4}; 5\frac{\pi}{3}$ c) $3\frac{\pi}{4}; 5\frac{\pi}{4}$ d) $\pi/4 ; \pi/2$ e) $3\frac{\pi}{4}; 7\frac{\pi}{4}$

2. Resolver si : $x \in [0 ; 2\pi]$
 $3\text{Tag}x - 4 = 0$

a) $53^\circ ; 127^\circ$ b) $53^\circ ; 233^\circ$ c) $75^\circ ; 225^\circ$ d) $75^\circ ; 105^\circ$ e) $45^\circ ; 135^\circ$

3. Resolver e indicar la solución general: $\text{Cos}3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $k\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}$ b) $2k\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3}$ c) $2k\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{12}$ d) $k\pi \pm \frac{\pi}{8}$ e) $k\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}$

4. Resolver : **$\text{Tag}(5x - 25^\circ) = -1$**

Encontrar las tres primeras soluciones positivas.

a) $32^\circ ; 68^\circ ; 104^\circ$ b) $31^\circ ; 62^\circ ; 102^\circ$ c) $32^\circ ; 64^\circ ; 106^\circ$
 d) $32^\circ ; 68^\circ ; 102^\circ$ e) $32^\circ ; 66^\circ ; 108^\circ$

5. Resolver : **$10\text{Sen}^2x - \text{Sen}x = 2$**

a) $k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$ b) $k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3}$ c) $k\pi \pm (-1)^k \frac{\pi}{4}$
 d) Ay E e) $k\pi + (-1)^k \text{arc Sen}(-\frac{2}{5})$

6. Resolver : **$\text{Sen}x + \text{Cos}2x = 1$**

a) $\pi/8$ b) $\pi/4$ c) $\pi/6$ d) $\pi/12$ e) $\pi/7$

7. Resolver: $\text{Sen}(4x - 20^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

a) $n\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{36}$ b) $n\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{24} - \frac{\pi}{12}$ c) $n\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{12}$
 d) $n\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{6}$ e) $n\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{6}$

8. Resolver : $\text{Ctg}x + 1 = 0$; $x \in < 0 ; 600^\circ >$

- i. $45^\circ ; 225^\circ ; 405^\circ ; 850^\circ$
- ii. $45^\circ ; 125^\circ ; 405^\circ ; 495^\circ$
- iii. $135^\circ ; 225^\circ ; 495^\circ ; 585^\circ$
- iv. $135^\circ ; 315^\circ ; 495^\circ$
- v. $225^\circ ; 315^\circ ; 858^\circ$

9. Resolver: $\text{Sen}2x = \text{Sen}x$

Indicar la solución general.

- a) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ b) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ c) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ d) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ e) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

10. Resolver : **$\text{Sen}x + \text{Cos}x = 1 + \text{Sen}2x$**

- a) $\pi/8 ; 0$ b) $\pi/6 ; \pi/2$ c) $\pi/3 ; 0$ d) $\pi/10 ; \pi/6$ e) $\pi/12 ; \pi/4$

11. Resolver : **$\text{Tag}^2x = \sqrt{3}\text{Tag}x$** ;

Si $x \in \langle 180^\circ ; 360^\circ \rangle$

- a) $150^\circ ; 210^\circ$ b) $240^\circ ; 360^\circ$ c) $180^\circ ; 240^\circ$
d) $240^\circ ; 270^\circ$ e) $210^\circ ; 270^\circ$

12. Resolver : **$2\text{Sen}^2x = 1 + \text{Cos}x$**

Indicar la suma de sus dos primeras soluciones.

- a) 180° b) 120° c) 240° d) 360° e) 200°

13. Resolver :

$$(\text{Sen}x + \text{Cos}x)^2 = 1 + \text{Cos}x$$

Indicar la tercera solución positiva.

- a) 180° b) 270° c) 390° d) 720° e) 450°

14. Resolver : **$\text{Sen}3x \cdot \text{Csc}x = 2$**

Hallar el número de soluciones en $[0; 2\pi]$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

15. Resolver :

$$2\text{Sec}x \text{Csc}x + 3\text{Tag}x = 2\text{Ctg}x + 5\sqrt{3}$$

Indicar la tercera solución.

- a) 210° b) 360° c) 420° d) 520° e) 650°

16. Resolver e indicar una de las soluciones generales.

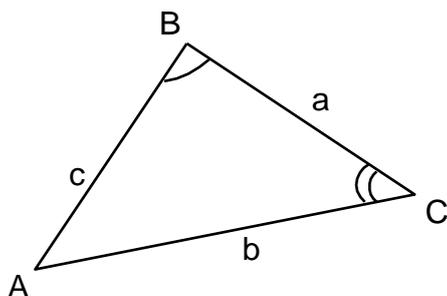
$$\text{Sen}^2x + \text{Sen}^22x = \text{Cos}^2x + \text{Cos}^22x$$

- a) $2k\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ b) $2k\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6}$ c) $2k\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{2}$ d) $k\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2}$ e) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

RESOLUCIONES DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

1. Ley de Senos

En todo triángulo la longitud de cada lado es D.P. al seno del ángulo que se opone al respectivo lado.



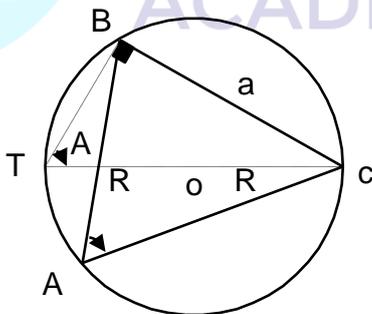
$$\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C} = K$$

Sea "S" el Area del $\triangle ABC$

$$S = \frac{bc}{2} \text{Sen}A \quad S = \frac{ac}{2} \text{Sen}B$$

Igualando áreas: $\frac{ac}{2} \text{Sen}B = \frac{bc}{2} \text{Sen}A$, luego: $\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B}$

COROLARIO DEL TEOREMA DE SENOS



$$\triangle TBA : \text{Sen} A = \frac{a}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\text{Sen}A}$$

$$\boxed{\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C} = 2R}$$

R = Circunradio

* Observaciones:

$$a = 2R \text{Sen}A, \quad b = 2R \text{Sen}B, \quad c = 2R \text{Sen}C$$

2. Ley de Cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

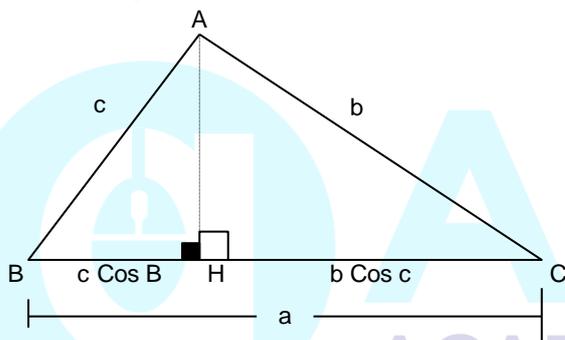
Observaciones:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

3. Ley de Tangentes

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right)} \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{B-C}{2}\right)} \quad \frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A+C}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{A-C}{2}\right)}$$

4. Ley de Proyecciones



$$a = b \cos C + c \cos B$$

$$b = a \cos C + c \cos A$$

$$c = a \cos B + b \cos A$$

* Funciones Trigonométricas de los semiángulos de un Δ en función de los lados:
Sabemos:

$$2 \operatorname{Sen}^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A$$

$$2 \operatorname{Sen}^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} =$$

$$= \frac{a^2 - (c^2 + b^2 - 2bc)}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

$$\operatorname{Sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$$

Perímetro

$$2p = a + b + c$$

$$2p - 2c = a + b + c - 2c \rightarrow 2(p-c) \rightarrow a + b - c$$

También $2(p-b) = a - b + c$

Luego:

$$\operatorname{Sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{2(p-c) \cdot 2(p-b)}{4abc}$$

Por analogía:

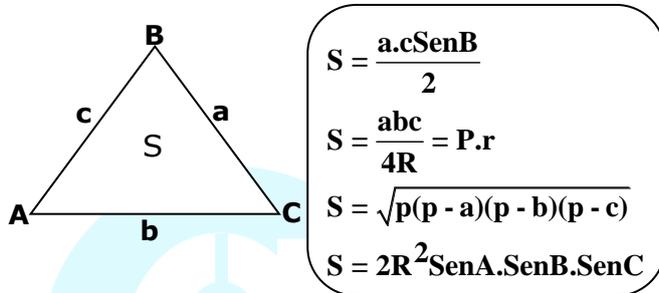
$$\therefore \text{Sen} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}; \text{Sen} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}; \text{Sen} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

También:

$$\text{Cos} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}; \text{Cos} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}; \text{Cos} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\text{Tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}; \text{Tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}; \text{Tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Área de la Región Triangular



Donde : **R = Circunradio** **r = Inradio** **p = Semiperimetro**

Bisectriz Interior:

$$V_a = \left(\frac{2bc}{b+c} \right) \text{Cos} \frac{A}{2}$$

Bisectriz Exterior:

$$V_b = \left(\frac{2ac}{|a-c|} \right) \text{Sen} \frac{A}{2}$$

Inradio:

$$r = (p-a) \text{tag} \left(\frac{A}{2} \right)$$

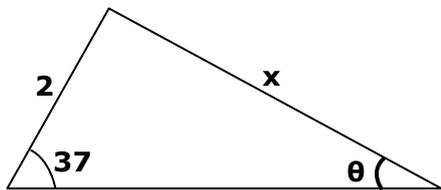
Exradio:

$$r_a = p \cdot \text{tag} \left(\frac{A}{2} \right)$$

EJERCICIOS

1. Hallar "x" si : $\text{Ctg } \theta = 2\sqrt{2}$

- a) 24
- b) 30
- c) 32
- d) 36
- e) 42



2. En un triángulo ABC ; $\hat{B} = 60^\circ$; $b = 3\sqrt{2}$; y $c = 3 + \sqrt{3}$. Hallar el ángulo A

- a) 25°
- b) 30°
- c) 45°
- d) 15°
- e) 20°

3. Si los lados b y c de un triángulo miden 31 cm. y $7\sqrt{2}$ cm. respectivamente y el ángulo A = 45° . Hallar el lado "a".

- a) 20°
- b) 15°
- c) 28°
- d) 30°
- e) 25°

4. El Coseno del mayor ángulo de un triángulo cuyos lados son tres números enteros y consecutivos es iguales a $1/5$. Hallar el perímetro del triángulo.

- a) 15
- b) 20
- c) 18
- d) 21
- e) 24

5. En un triángulo ABC simplificar:

$$M = \frac{b - a}{b + a} + \frac{\text{Sen}A + \text{Sen}C}{\text{Sen}B + \text{Sen}C}$$

- a) $b + c$
- b) $a + c$
- c) 1
- d) 2
- e) $a - c$

6. En un triángulo de lados : x ; x + 3 y (x - 4) el ángulo medio mide 60° . Hallar "x"

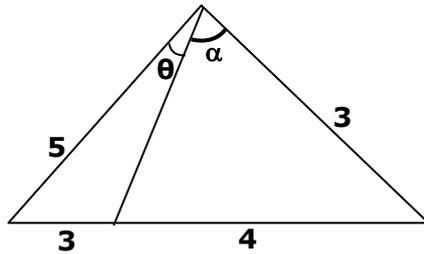
- a) 25
- b) 28
- c) 30
- d) 37
- e) 42

7. En un triángulo ABC se sabe que : $b = 20\sqrt{2}$; $c - a = 16$ y $m\angle A = 45^\circ$. Calcular el valor del lado a.

- a) 42
- b) 52
- c) 56
- d) 62
- e) 64

8. Hallar : $E = \frac{\text{Sen}\theta}{\text{Sen}\alpha}$

- a) 9 / 10
- b) 9 / 20
- c) 10 / 9
- d) 19 / 20
- e) 10 / 19



9. En un triángulo ABC se cumple : $\frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} = a^2$

Hallar el valor del ángulo "A"

- a) 80
- b) 45
- c) 70
- d) 30
- e) 60

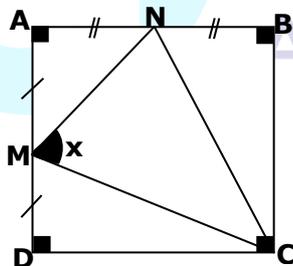
10. En un triángulo ABC se cumple : $a = \sqrt{b^2 + c^2 - \frac{2}{3}bc}$

Hallar $E = \text{Tag}\hat{A}$

- a) 1
- b) $\sqrt{3}/3$
- c) $\sqrt{2}$
- d) $2\sqrt{2}$
- e) $\sqrt{3}$

11. En la figura ABCD es un cuadrado; M y N son puntos medios. Hallar "Sec x"

- a) $\sqrt{5}$
- b) $\sqrt{6}$
- c) $\sqrt{7}$
- d) $\sqrt{8}$
- e) $\sqrt{10}$



12. Hallar el perímetro de un triángulo si los lados son tres números consecutivos y además de los ángulos miden 30° y 37° respectivamente.

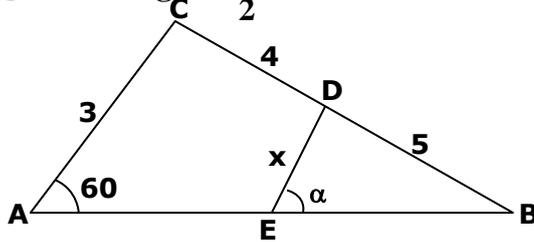
- a) 12
- b) 14
- c) 16
- d) 18
- e) 20

13. En un triángulo ABC se tiene que : $b=5$, $c=6$, $m\angle A = 37^\circ$ y el radio inscrito $r = 0.9$. Hallar el lado a.

- a) 8
- b) 9
- c) 10
- d) 12
- e) 14

14. En la figura si $\text{Tag} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Hallar \overline{DE}

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5



15. En un triángulo ABC se cumple que:

$$abc = 16 \text{ y } \text{Sen}A \cdot \text{Sen}B \cdot \text{Sen}C = \frac{1}{4}$$

Calcular el circunradio de dicho triángulo.

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

16. Los lados de un triángulo son 3 ; 5 y 7 respectivamente; se traza la bisectriz relativa al lado mayor. Hallar la longitud de esta bisectriz sabiendo que la proyección de esta sobre el lado menor es 2.

- a) 1
- b) 2
- c) 4
- d) 6
- e) 8

17. En un triángulo ABC se cumple. $a^2 + b^2 + c^2 = 10$

$$\text{Hallar } E = bc \cos \hat{A} + ac \cos \hat{B} + ab \cos \hat{C}$$

- a) 10
- b) 20
- c) 5
- d) 15
- e) 15 / 2

18. En un triángulo ABC ; $\hat{C} = 60^\circ$ y $a = 3b$. Hallar $E = \text{Tag} (A - B)$

- a) $2\sqrt{3}$
- b) $3\sqrt{3}$
- c) $4\sqrt{3}$
- d) $\sqrt{3}$
- e) $\sqrt{3}/2$